Kepler 问题：作业与期末报告

作业：

1. 考虑 Kepler 方程 $M = E - e\sin E$ 的幂级数解：
$$E(M,e) = M + \sum_{n\geq 1} e^k E_k(M).$$
   i) 计算 $E_k(M)$, $k = 1, \ldots, 6$；
   ii) 将 $E_k(M)$, $k = 1, \ldots, 6$ 表示成 $\sin(nM)$ 的线性组合。

2. 利用 Lagrange 反演公式求解方程 $y^5 - y + \alpha = 0$ 的幂级数解 $y(\alpha)$，并分析其收敛性。

3. 考虑万有引力势的如下扰动：
$$U_\ell(r) = -\frac{k}{r} + \epsilon\frac{1}{r^\ell}.$$
   i) 对于 $\ell = 3, \ldots, 6$ 计算椭圆轨道的进动角。
   ii) 若偏心率 $e \approx 0$，对一般的 ℓ 计算上述进动角。

4.（正则变换）设函数 $f(q^1, \ldots, q^n; A_1, \ldots, A_n)$ 满足
$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial A_\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,n} \neq 0,$$
通过如下隐函数方程
$$p_\alpha = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}, \quad B_\alpha = \frac{\partial f}{\partial A_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n$$
定义一个坐标变换
$$(p_1, \ldots, p_n; q^1, \ldots, q^n) \mapsto (A_1, \ldots, A_n; B^1, \ldots, B^n).$$
求证：对于任意光滑函数 $H = H(p_1, \ldots, p_n; q^1, \ldots, q^n)$，其 Hamilton 正则方程
$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n$$
等价于关于 $(A_1, \ldots, A_n; B^1, \ldots, B^n)$ 的正则方程
$$\frac{\mathrm{d}A_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial B^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}B_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial A_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

期末报告:

期末报告的主题是量子力学中氢原子问题的精确求解。报告提纲如下:

1. 引言:包括量子力学的基本思想,氢原子问题的 Schrödinger 方程等,最后将问题归结为如下特征值问题
$$\mathbf{H}\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}),$$
其中 $\mathbf{H}$ 为系统的 Hamilton 算子:
$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

2. 解析方法:利用分离变量法求解上述问题。
具体来说,设
$$\Psi = CR(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi),$$
然后在球坐标下对原特征值问题进行分离变量得到关于 $R(r)$、$\Theta(\theta)$ 和 $\Phi(\phi)$ 的三个常微分方程,接下来
   i) 利用 $\Phi(\phi)$ 的周期边界条件定出 $\Phi(\phi)$ 和磁量子数;
   ii) 利用 $\Theta(\theta)$ 在南北极处的正规性边条件定出 $\Theta(\theta)$ 和角量子数(幂级数解法、连带 Legendre 多项式);
   iii) 利用 $R(r)$ 在 $r = 0$ 的正规性边条件和无穷远衰减边条件定出 $R(r)$ 和主量子数(幂级数解法、Laguerre 多项式)。

   最后,再确定归一化常数 C 使得 $\|\Psi\|_{L^2} = 1$。

3. 代数方法:利用氢原子问题中的 $SO(4)$ 对称性来求解。
   i) 首先引入角动量算子 $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$,其中
$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{p} = \left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right).$$
   然后定义 Laplace-Runge-Lenz 算子 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z)$:
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \frac{k}{r}\mathbf{r},$$
   接下来说明 $[\mathbf{H}, \mathbf{L}] = 0$、$[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = 0$。
   ii) 设 $\lambda < 0$,V_λ 是 $\mathbf{H}$ 的特征值为 λ 的特征子空间,于是 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{A}$ 都可限制在这个子空间上。接下来计算 $\mathbf{L}_x$、$\mathbf{L}_y$、$\mathbf{L}_z$、$\mathbf{A}_x$、$\mathbf{A}_y$、$\mathbf{A}_z$ 的交换关系,证明它们事实上给出了 Lie 群 $SO(4)$ 的 Lie 代数 $so(4)$ 在 V_λ 上的一个表示。

iii) 利用升降算符（ladder operator）研究 V_λ 这个 $so(4)$ 表示的结构，由此得到全部量子数的正确取值范围。

4. 微扰问题（可选）：利用上述精确解和微扰论技术研究弱场下的 Zeeman 效应和 Stark 效应。

其他要求：要有完整的计算细节，不能简单地抄书。