清华大学本科生考试试题专用纸

分析力学 2018 年 6 月 15 日

1.（20 分）设 $L = L(q, \dot{q}, t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个拉氏量。

i)（15 分）若 $\tilde{q} = \tilde{q}(q)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的另一组坐标，且它们光滑地依赖 q，求证：

$$\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \frac{\delta L}{\delta \tilde{q}^\beta}.$$

ii)（5 分）若 $\tilde{q}$ 是含时的，即 $\tilde{q} = \tilde{q}(q, t)$，上述结论是否成立?

2.（20 分）设 $L = L(q, \dot{q})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个拉氏量，对于 $\beta > 0$，引入另一个拉氏量 $\tilde{L} = e^{\beta t} L(q, \dot{q})$。

i)（10 分）设 $H = H(q, \dot{q})$ 是 L 的哈密顿函数，$q(t)$ 满足 $\tilde{L}$ 的 Euler-Lagrange 方程，求证：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(q(t), \dot{q}(t)) = -\beta\, \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}.$$

ii)（10 分）设 $n = 1$，对于自由落体问题的拉氏量：

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - m\, g\, q,$$

求解 $\tilde{L}$ 的 Euler-Lagrange 方程，其初始条件选为 $q(0) = q_0$、$\dot{q}(0) = 0$。

3.（20 分）设 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$，$M$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的圆锥：

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, \quad \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \theta_0\}.$$

i)（15 分）求解 M 上的测地线方程。

ii)（5 分）若 M 上存在闭合测地线，θ_0 应满足什么条件?

4.（20 分）设 $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个 C^2 函数，且满足 $U''>0$。考虑拉氏量

$$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-U(q).$$

i)（10 分）求证：若 U 有极小值点，则 L 的 Euler-Lagrange 方程有唯一的平衡点。

ii)（10 分）试求在这一平衡点附近微振动的周期。

5.（20 分）设 $\mathbb{R}^3$ 中有电标量势 ϕ 和磁矢量势 A：

$$\phi(x,y,z)=-\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad A(x,y,z)=\frac{B}{2}(-y,x,0).$$

已知电子在电磁场中运动的拉氏量为：

$$L=\frac{1}{2}mv^2+e\left(A\cdot v-\phi\right).$$

i)（5 分）写出上述拉氏量在空间球坐标系下的具体形式和两个首次积分。

ii)（5 分）写出上述拉氏量在空间球坐标系下的 Hamilton-Jacobi 方程，并指出它是否可以分离变量。

iii)（10 分）假设磁场强度 B 充分小，有一个电子在 xy 平面内按上述拉氏量所给出的 Euler-Lagrange 方程做近椭圆运动。试求其进动角（精确到 B 的一阶项）。

6.（附加题）设 $0<\varepsilon<1$，如下方程称为开普勒方程：

$$t=\xi-\varepsilon\sin\xi.$$

i) 求证开普勒方程存在唯一的解 $\xi(t)$，且它可表示为

$$\xi(t)=t+\eta(t),$$

其中 η 是一个以 2π 为周期的奇函数。

ii) 求证函数 η 的 Fourier 级数为：

$$\eta(t)=\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)\sin(nt),$$

其中 $J_n(x)$ 为 n 阶 Bessel 函数：

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\left(n\,\theta-x\,\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$