分析力学期末考试参考答案
（2018 年春季学期）

1.（20 分）设 $L = L(q, \dot{q}, t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个拉氏量。

i)（15 分）若 $\tilde{q} = \tilde{q}(q)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的另一组坐标，且它们光滑地依赖 q，求证：

$$\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \frac{\delta L}{\delta \tilde{q}^\beta}.$$

ii)（5 分）若 $\tilde{q}$ 是含时的，即 $\tilde{q} = \tilde{q}(q, t)$，上述结论是否成立?

解答： 根据变分导数的定义，我们有

$$\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}, \quad \frac{\delta L}{\delta \tilde{q}^\beta} = \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^\beta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta},$$

其中

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^\beta} \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta}{\partial q^\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha},$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} =& \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^\beta} \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \right) \\ =& \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^\beta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \right) \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \left(\frac{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \right),\end{aligned}$$

注意（此处 $\tilde{q}$ 可以含时）

$$\frac{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma + \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma + \frac{\partial^2 \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha \partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha},$$

所以

$$\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^\beta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\beta} \right) \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \tilde{q}^\beta}{\partial q^\alpha} \frac{\delta L}{\delta \tilde{q}^\beta}.$$

上述推导中 $\tilde{q}$ 可以含时，所以这一结论在含时情形也是对的。 □

2.（20 分）设 $L = L(q, \dot{q})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个拉氏量，对于 $\beta > 0$，引入另一个拉氏量 $\tilde{L} = e^{\beta t} L(q, \dot{q})$。

i)（10 分）设 $H = H(q, \dot{q})$ 是 L 的哈密顿函数，$q(t)$ 满足 $\tilde{L}$ 的 Euler-Lagrange 方程，求证：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(q(t), \dot{q}(t)) = -\beta\, \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}.$$

ii)（10 分）设 $n = 1$，对于自由落体问题的拉氏量：

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - m\, g\, q,$$

求解 $\tilde{L}$ 的 Euler-Lagrange 方程，其初始条件选为 $q(0) = q_0$、$\dot{q}(0) = 0$。

解答： i) $\tilde{L}$ 的变分导数为

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial\left(e^{\beta t} L\right)}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\left(e^{\beta t} L\right)}{\partial \dot{q}^\alpha} = e^{\beta t}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \beta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right),$$

所以 $q(t)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = -\beta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - L\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha - \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\ddot{q}^\alpha\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha = -\beta\, \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}.
\end{aligned}$$

ii) 由 i) 中的计算可知 $q(t)$ 满足

$$\ddot{q} + \beta \dot{q} + g = 0, \quad q(0) = q_0,\ \dot{q}(0) = 0.$$

解之可得

$$q(t) = q_0 - \frac{g}{\beta^2}\left(e^{-\beta t} + \beta t - 1\right).$$

□

3.（20 分）设 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$，$M$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的圆锥：

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, \quad \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \theta_0\}.$$

i)（15 分）求解 M 上的测地线方程。

ii)（5 分）若 M 上存在闭合测地线，θ_0 应满足什么条件?

解答： i) 在球坐标系下，M 上的点可表示为

$$x = r\sin\theta_0\cos\phi, \quad y = r\sin\theta_0\sin\phi, \quad z = r\cos\theta_0,$$

其中 $r > 0$、$0 \le \phi < 2\pi$。

选取如下拉氏量：

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta_0\dot{\phi}^2\right),$$

它满足关于 ϕ 的角动量守恒和能量守恒：

$$P_\phi = r^2\sin^2\theta_0\dot{\phi}, \quad E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{P_\phi^2}{2r^2\sin^2\theta_0},$$

于是测地线方程为：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{r^2\sin^2\theta_0}{P_\phi}\sqrt{2E - \frac{P_\phi^2}{r^2\sin^2\theta_0}}.$$

设 $u = r^{-1}$，则有

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin\theta_0\mathrm{d}\phi, \quad a = \sqrt{2E\frac{\sin^2\theta_0}{P_\phi^2}},$$

两边积分得：

$$r = u^{-1} = \frac{a^{-1}}{\cos\left(\sin\theta_0\left(\phi-\phi_0\right)\right)}.$$

ii) 要想形成闭合测地线，当 ϕ 从 0 跑到 2π 时，上面解出的 $r(\phi)$ 应始终大于零，所以有

$$\sin\theta_0\left(2\pi\right) < \pi,$$

于是可知 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$。 □

4.（20 分）设 $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 C^2 函数，且满足 $U'' > 0$。考虑拉氏量

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q).$$

i)（10 分）求证：若 U 有极小值点，则 L 的 Euler-Lagrange 方程有唯一的平衡点。

ii)（10 分）试求在这一平衡点附近微振动的周期。

解答： i) L 的 Euler-Lagrange 方程为

$$m\ddot{q} + U'(q) = 0,$$

常值函数 $q(t) = q_0$ 是它的解当且仅当 $q = q_0$ 是 $U(q)$ 的驻点。已知 U 有极值点，那么极值点就是驻点。若 U 有不止一个驻点，则由罗尔定理可知两驻点

之间必有一个拐点，这与 $U'' > 0$ 矛盾，所以 U 只能有一个驻点。于是 L 的 Euler-Lagrange 方程有唯一的平衡点。

ii) 设 $q = q_0$ 是平衡点，$U_0 = U(q_0)$ 为势能最低点。取总机械能为 $E = U_0 + \varepsilon$，ε 为充分小的正数。注意势能 $U(q)$ 需满足

$$U(q) = U_0 + \frac{1}{2}U''(q_0)\,(q-q_0)^2 + o\left((q-q_0)^2\right) \le U_0 + \varepsilon = E,$$

所以 q 将在小区间 $[q_1, q_2]$ 之间振动，其中

$$q_{1,2} = q_0 \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}} + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

设 $q = q_0 + y\sqrt{\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}}$，忽略掉所有的小 o 项可得

$$\begin{aligned}
T =& 2\int_{q_1}^{q_1} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(E-U(q))}} \\
=& 2\sqrt{\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(U_0+\varepsilon-U_0-\frac{1}{2}U''(q_0)\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}y^2\right)}} \\
=& 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(q_0)}}.
\end{aligned}$$

□

5.（20 分）设 $\mathbb{R}^3$ 中有电标量势 φ 和磁矢量势 A：

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad A(x,y,z) = \frac{B}{2}(-y,x,0).$$

已知电子在电磁场中运动的拉氏量为：

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e\,(A\cdot v - \varphi)\,.$$

i)（5 分）写出上述拉氏量在空间球坐标系下的具体形式和两个首次积分。

ii)（5 分）写出上述拉氏量在空间球坐标系下的 Hamilton-Jacobi 方程，并指出它是否可以分离变量。

iii)（10 分）假设磁场强度 B 充分小，有一个电子在 xy 平面内按上述拉氏量所给出的 Euler-Lagrange 方程做近椭圆运动。试求其进动角（精确到 B 的一阶项）。

解答： i) 选取如下球坐标系：

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

于是

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)+\frac{ek}{r}+\frac{eB}{2}r^2\sin^2\theta\dot{\phi}.$$

它满足关于 ϕ 的角动量守恒和能量守恒：

$$\begin{aligned}M=&mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}+\frac{eB}{2}r^2\sin^2\theta,\\E=&\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)-\frac{ek}{r}.\end{aligned}$$

ii) 首先引入广义动量：

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\theta=mr^2\dot{\theta},\quad p_\phi=mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}+\frac{eB}{2}r^2\sin^2\theta,$$

于是广义速度可表示为：

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\quad \dot{\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}-\frac{eB}{2m},$$

于是哈密顿函数为

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}-\frac{ek}{r}-\frac{eB}{2m}p_\phi+\frac{e^2B^2}{8m}r^2\sin^2\theta.$$

因为有能量守恒和角动量守恒，所以取作用量函数为

$$S=-Et+M\phi+S_1(r)+S_2(\theta),$$

则 Hamilton-Jacobi 方程为：

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{M^2}{2mr^2\sin^2\theta}-\frac{ek}{r}-\frac{eB}{2m}M+\frac{e^2B^2}{8m}r^2\sin^2\theta=E,$$

它无法分离变量，因为左边最后一项无法分离。

iii) 在 xy 平面上 $\theta=\frac{\pi}{2}$、$\dot{\theta}=0$，拉氏量变为

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{ek}{r}+\frac{eB}{2}r^2\dot{\phi},$$

两个守恒量变为

$$M=mr^2\dot{\phi}+\frac{eB}{2}r^2,\quad E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)-\frac{ek}{r},$$

从中消去 $\dot{\phi}$ 后得到一维等效问题：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{\text{eff}}(r)=E,\quad U_{\text{eff}}(r)=-\frac{ek}{r}+\frac{1}{2m}\left(\frac{M}{r}-\frac{eB}{2}r\right)^2.$$

解驻点方程 $U'_{\text{eff}}(r)=0$ 得径向运动的平衡位置：

$$r_0=\frac{M^2}{ekm}+o(B)$$

于是径向运动的频率为：

$$\omega_r = \sqrt{\frac{U''_{\text{eff}}(r_0)}{m}} = \frac{e^2k^2m}{M^3} + o(B).$$

而角向运动的频率为

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \frac{M}{mr_0^2} - \frac{eB}{2m} = \frac{e^2k^2m}{M^3} - \frac{eB}{2m} + o(B),$$

所以进动角为

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\omega_\phi - \omega_r}{\omega_r} = -\frac{\pi BM^3}{ek^2m^2} + o(B).$$

□

6.（附加题）设 $0 < \varepsilon < 1$，如下方程称为开普勒方程：

$$t = \xi - \varepsilon\sin\xi.$$

i) 求证开普勒方程存在唯一的解 $\xi(t)$，且它可表示为

$$\xi(t) = t + \eta(t),$$

其中 η 是一个以 2π 为周期的奇函数。

ii) 求证函数 η 的 Fourier 级数为：

$$\eta(t) = \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)\sin(nt),$$

其中 $J_n(x)$ 为 n 阶 Bessel 函数：

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\,\theta - x\,\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

解答： i) 因为

$$\left|\frac{\mathrm{d}t(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right| = |1 - \varepsilon\cos\xi| > 1 - \varepsilon > 0,$$

所以 $t(\xi)$ 是严格增函数，于是它有反函数 $\xi(t)$。

注意

$$-t = (-\xi) - \varepsilon\sin\left(-\xi\right),$$

所以 $\xi(-t) = -\xi(t)$，即 $\xi(t)$ 是奇函数，于是 $\eta(t) = \xi(t) - t$ 也是奇函数。

注意

$$t + 2\pi = (\xi + 2\pi) - \varepsilon\sin\left(\xi + 2\pi\right),$$

所以 $\xi\left(t + 2\pi\right) = \xi(t) + 2\pi$，于是

$$\eta(t + 2\pi) = \xi(t + 2\pi) - t - 2\pi = \xi(t) - t = \eta(t).$$

ii) 设

$$\eta(t)=\sum_{n\geq 1} b_n \sin(nt),$$

则

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\eta(t)\sin nt\mathrm{d}t,$$

分部积分得:

$$\begin{aligned} b_n=&\frac{2}{\pi}\left(-\eta(t)\frac{\cos nt}{n}\bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n}\eta'(t)\mathrm{d}t\right)\\ =&\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\xi'(t)-1\right)\cos nt\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

注意

$$\int_0^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t=0,$$

所以

$$\begin{aligned} b_n=&\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\xi'(t)\cos nt\mathrm{d}t\\ =&\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos n\left(\xi-\varepsilon\sin\xi\right)\mathrm{d}\xi\\ =&\frac{2}{n}J_n(n\varepsilon). \end{aligned}$$

□