数学分析（3）：第 11 次作业

刘思齐

一、计算如下（广义）函数的 Fourier 变换：

1. $\cos(\alpha x)$
2. $\sin(\alpha x)$
3. $x\ \cos(x)$
4. $x\ \sin(x)$
5. $\mathrm{sgn}(x)$
6. $x\,\mathrm{sgn}(x)$
7. $u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
8. $T(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$
9. $x^n\ (n \geq 0)$
10. $\delta^{(n)}(x)\ (n \geq 0)$

二、设 $\mathscr{S}$ 是 Schwartz 速降函数空间，$\mathscr{T} = D(\mathscr{S})$（即速降函数的导数构成的空间），则 $\mathscr{T}$ 显然是 $\mathscr{S}$ 的子空间。

i) 任取一个 $f_0 \in \mathscr{S}$ 满足 $\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\mathrm{d}x = 1$。对于 $f \in \mathscr{S}$，定义：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} (f(y) - \lambda\, f_0(y))\ \mathrm{d}y, \quad \text{其中 } \lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

求证：$F \in \mathscr{S}$。（提示：考虑 F 的 Fourier 变换）

ii) 求证：$\mathscr{S} = \mathbb{C}f_0 \oplus \mathscr{T}$。

iii) 求证：对于任意的 $\phi \in \mathscr{S}'$，以及 $C \in \mathbb{C}$，存在唯一的 $\psi \in \mathscr{S}'$ 满足：

$$\psi' = \phi, \quad \psi(f_0) = C.$$

iv) 若 $\psi \in \mathscr{T}$ 满足 $\psi' = 0$，则 ψ 是一个常数，即存在 $c \in \mathbb{C}$，使得对于任意的 $f \in \mathscr{S}$，有

$$\psi(f) = \int_{\mathbb{R}} c\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

v) 若 $\phi \in \mathscr{S}$ 满足 $x\,\phi = 0$，求证：存在一个常数 $c \in \mathbb{C}$，使得 $\phi = c\,\delta$。（提示：考虑 $x\,\phi$ 的 Fourier 变换）

vi) 求方程 $(x - x_0)\phi = 0$ 的通解，其中 $\phi \in \mathscr{S}'$。

vii) 求方程 $(x-x_0)^n\phi=0$ 的通解，其中 $\phi\in\mathscr{S}'$、$n\in\mathbb{N}$。

viii) 求方程 $(x-x_1)^n(x-x_2)^m\phi=0$ 的通解，其中 $\phi\in\mathscr{S}'$、$x_1\neq x_2$、$n,m\in\mathbb{N}$。

ix) 求方程 $P(x)\phi=0$ 的通解，其中 $P\in\mathbb{C}[x]$、$\phi\in\mathscr{S}'$。

x) 求线性常系数常微分方程 $P(D)\phi=0$ 的通解，其中 $P\in\mathbb{C}[\xi]$、$\phi\in\mathscr{S}'$。