数学分析（3）期末试题　　卷 A　　2016.1.6

一、（15 分）求下列函数的 Fourier 级数：

$$\text{i)}\quad u(x)=e^{\cos x}\cos\left(\sin(x)\right); \qquad \text{ii)}\quad v(x)=e^{\cos x}\sin\left(\sin(x)\right).$$

二、（15 分）

i) 设 $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是两个周期为 2π 的 Riemann 可积函数。求证：若它们具有相同的 Fourier 系数，则它们几乎处处相等。

ii) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是周期为 2π 的连续函数，$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是它的 Fourier 系数。求证：若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<+\infty$，则 f 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 f。

三、（20 分）设 f 是周期为 2π 的奇函数，且对于 $x\in[0,\pi]$ 有

$$f(x)=x(\pi-x).$$

i) 求 f 的 Fourier 级数；

ii) 计算无穷级数的值：

$$S_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

四、（15 分）设 $\mathcal{S}$ 是 Schwartz 速降函数空间，$\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 是其上的 Fourier 变换。定义运算 $\mathcal{P}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$，

$$f\mapsto\mathcal{P}(f)=\frac{1}{2}\left(f\cdot\mathcal{F}^2(f)+\mathcal{F}(f)\star\mathcal{F}^3(f)\right),$$

其中 $\cdot$ 表示乘法，$\star$ 表示卷积。

i) 求证：对于任意的 $f \in \mathcal{S}$，$\mathcal{F}(\mathcal{P}(f)) = \mathcal{P}(f)$；

ii) 对于 $g(x) = e^{-\pi x^2}$，试求一个 $f \in \mathcal{S}$，使得 $g = \mathcal{P}(f)$。

五、（15 分）设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是偶函数，满足 $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-A, A]$，且 f 在 $[-A, A]$ 上 Riemann 可积。设 $\hat{f}(\xi)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 变换。求证：

i) $\hat{f}(\xi)$ 是一个光滑函数；

ii) $\hat{f}(\xi)$ 可在 $\xi = 0$ 处展开为收敛半径为无穷大的 Taylor 级数。

六、（20 分）设 $\alpha \in \mathbb{R}$、f 是周期为 2π 的奇函数，且对于 $x \in (0, \pi)$ 有

$$f(x) = \cosh(\alpha\ (2x - \pi)).$$

i) 求 f 的 Fourier 级数；

ii) 求证：

$$\frac{\pi}{\cosh \pi \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\alpha^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2};$$

iii) 计算 $g(x) = \frac{1}{\cosh \pi x}$ 的 Fourier 变换。