数学分析（3）期中试题参考答案及评分标准

一、（15 分）设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$、$Y \subseteq \mathbb{R}^m$ 是两个非退化有界闭区间，f 是 $X \times Y$ 上的连续可微函数，$x_0 \in X$。求证：当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x, y)$ 对于 $y \in Y$ 一致收敛于极限函数 $f(x_0, y)$。

解答：（证法一）因为 $X \times Y$ 有界闭，所以紧。因为 f 在 $X \times Y$ 上连续，所以一致连续，即对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $(x_1, y_1,), (x_2, y_2) \in X \times Y$，如果 $d((x_1, y_1,), (x_2, y_2)) < \delta$，就有 $|f(x_1, y_1,) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$。于是，对于 $x \in B_\delta(x_0)$，以及任意的 $y \in Y$，因为

$$d((x, y,), (x_0, y)) = d(x, x_0) < \delta,$$

所以 $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$，所以收敛是一致的。

（证法二）因为 f 连续可导，所以 $\|f'\|$ 是紧集 $X \times Y$ 上的连续函数，因此有最大值，记之为 M。对于任意的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon / M$，则对于任意的 $x \in B_\delta(x_0)$，根据有限增量定理，有

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \leq M\|x - x_0\| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以收敛是一致的。

（注：此题只需连续就够了，连续可微的条件是冗余的。） $\square$

（评分标准：只要答出一致连续或者有限增量定理就基本上对了，有小毛病的话会再减一两分。）

二、（15 分）设 $\mu > 0$，且不是偶数。

i) 求证：函数 $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$ 满足如下微分方程：

$$(1 - x^2)f''(x) - x\,f'(x) + \mu^2 f(x) = 0.$$

ii) 利用上述微分方程计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的 Taylor 级数，并确定其收敛区域。

解答: i) 略。ii) 对方程求 n 次导数，利用 Leibniz 公式可得:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)x\,f^{(n+1)}(x)+(\mu^2-n^2)f^{(n)}(x)=0,$$

于是 $f^{(n+2)}(0)=(n^2-\mu^2)f^{(n)}(0)$。注意 $f(0)=1$、$f'(0)=0$，所以

$$f^{(2k)}(0)=\prod_{i=0}^{k-1}((2i)^2-\mu^2),\quad f^{(2k+1)}(0)=0,$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的 Taylor 级数为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}((2i)^2-\mu^2)\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

记上述幂级数中 x^{2k} 的系数为 a_k，则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{((2k)^2-\mu^2)}{(2k+2)(2k+1)}=1,$$

所以收敛半径 $R=1$。

再看端点，设 $l=[\mu/2]+1$，

$$b=\prod_{i=0}^{l-1}((2i)^2-\mu^2),$$

于是

$$\begin{aligned}
|f(\pm1)| &= \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k+\sum_{k=l}^{\infty}\frac{b}{(2k)!}\prod_{i=l}^{k-1}((2i)^2-\mu^2)\right| \\
&\le \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k\right|+|b|\sum_{k=l}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\prod_{i=l}^{k-1}((2i)^2-\mu^2) \\
&\le \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k\right|+|b|\sum_{k=l}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\prod_{i=l}^{k-1}(2i)^2 \le \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k\right|+|b|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((2k-2)!!)^2}{(2k)!} \\
&= \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k\right|+|b|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k-2}}{k^2\binom{2k}{k}} = \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k\right|+\frac{|b|}{2}\left(\arcsin\frac{2}{2}\right)^2 \\
&= \left|\sum_{k=0}^{l-1}a_k\right|+\frac{\pi^2}{8}|b|,
\end{aligned}$$

所以端点也收敛，于是收敛区域为 $[-1,1]$。

（注: 若利用 Cauchy–Hadamard 公式求收敛半径, 那个极限很难求, 除非将 a_k 写为

$$a_k = \frac{2^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \frac{\Gamma(k+\mu/2)\Gamma(k-\mu/2)}{\Gamma(\mu/2)\Gamma(-\mu/2)},$$

然后利用 Stirling 公式。

确定端点时, 幂级数的前面若干项是交错的, 直接放缩会出错, 所以需要摘出若干坏的项，剩下的级数是纯正项或纯负项的（要看 b 的符号），再作估计就容易了。最后那个级数如果求不出来也可以用 Stirling 公式估计通项的阶，然后说明收敛。） $\square$

（评分标准：i) 送 5 分。ii) 系数 5 分、收敛半径 4 分、端点 1 分。）

三、（15 分）设 f 是闭区间 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续可微函数，求证：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P \in \mathbb{R}[x]$，使得对任意的 $x \in [a,b]$，有

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad |f'(x) - P'(x)| < \varepsilon.$$

解答: （证法一）设 ε 是任给的正数。因为 $f' \in C[a,b]$，根据 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 Q 满足对任意的 $x \in [a,b]$，有

$$|f'(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a+1} < \varepsilon,$$

于是

$$-\frac{\varepsilon}{b-a+1} < f'(x) - Q(x) < \frac{\varepsilon}{b-a+1},$$

两边从 a 到 x 积分得

$$-\frac{\varepsilon}{b-a+1}(x-a) < f(x) - f(a) - \int_a^x Q(y)\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{b-a+1}(x-a),$$

设

$$P(x) = f(a) + \int_a^x Q(y)\mathrm{d}y,$$

显然 P 是多项式，且满足

$$|f(x) - P(x)| < \frac{x-a}{b-a+1}\varepsilon < \varepsilon.$$

（证法二）设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$，$g(t)=f(a+t(b-a))$，只要证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $Q(t)$ 使得

$$|g(t)-Q(t)|<\varepsilon,\quad |g'(t)-Q'(t)|<\varepsilon(b-a),$$

则 $P(x)=Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 即满足条件。我们只需要证明右边都是 ε 的情况。

对于连续函数 $g(t)$ 和 $g'(t)$，我们构造它们的 n 次 Bernstein 多项式：

$$A_n(x)=\sum_{i=0}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},$$
$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n} g'\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},$$

根据 Weierstrass 定理的 Bernstein 多项式证法，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对任意的 $n>N$，有

$$|g(t)-A_n(t)|<\varepsilon,\quad |g'(t)-B_n(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，考虑 $A_{n+1}(t)$ 的导数，根据书上的引理，有

$$A'_{n+1}(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{g\left(\frac{i+1}{n+1}\right)-g\left(\frac{i}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}.$$

根据 Langrange 中值定理，存在 $\xi_i\in(\frac{i}{n+1},\frac{i+1}{n+1})$，使得

$$g\left(\frac{i+1}{n+1}\right)-g\left(\frac{i}{n+1}\right)=\frac{g'(\xi_i)}{n+1},$$

于是

$$A'_{n+1}(t)-B_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\left(g'(\xi_i)-g'\left(\frac{i}{n}\right)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}.$$

注意 g' 是 $[0,1]$ 上的连续函数，所以一致连续，于是存在 $\delta>0$，使得对于满足 $|t_1-t_2|<\delta$ 的 $t_1,t_2\in[0,1]$，有 $|g'(t_1)-g'(t_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$。注意

$$\left|\xi_i-\frac{i}{n}\right|\le\frac{i}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}\le\frac{2}{n+1},$$

所以只要取 $n > N$，使得 $\frac{2}{n+1} < \delta$，就有

$$\left|A'_{n+1}(t) - B_n(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\left|g'(t) - A'_{n+1}(t)\right| \le |g'(t) - B_n(t)| + \left|A'_{n+1}(t) - B_n(t)\right| < \varepsilon,$$

最后取 $Q(t) = A_{n+1}(t)$ 即可。

（注：证法一很容易推广到 C^k 情形。证法二难度较高，很多人试图用这类证法，但是没有人写得清楚，所以我写一个这类证法作为参考。这类命题对高维空间中的紧集也对，但是其证明复杂得多。） □

（评分标准：证法一，能写出 P 的基本上就是满分。证法二有三个要点：导数的恒等式、中值定理、一致连续，每个 5 分。）

四、(15 分)

i) 求证：如下广义积分收敛

$$I = \int_0^1 \frac{\log(t)\,\log(1-t)}{t\,(1-t)}\mathrm{d}t.$$

ii) 求证：函数项级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(t)}{n}t^{n-1}$$

对于 $t \in [0,1]$ 一致收敛。

iii) 利用 i)、ii) 证明：$I = 2\,\zeta(3)$，即

$$I = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

解答： i) 注意

$$\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t},$$

所以

$$I = \int_0^1 \frac{\log(t)\,\log(1-t)}{t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\log(t)\,\log(1-t)}{1-t}\mathrm{d}t,$$

对后一积分换元 $t \mapsto 1-t$ 可得

$$I = 2\int_0^1 \frac{\log(t)\ \log(1-t)}{t}\mathrm{d}t,$$

所以只需考虑积分

$$J = \int_0^1 \frac{\log(t)\ \log(1-t)}{t}\mathrm{d}t.$$

积分 J 的被积函数恒正，我们只要证明变限积分有上界即可。因为

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(t)\log(1-t)}{\sqrt{t}} = 0, \quad \lim_{t\to 0}\frac{\log(t)\log(1-t)}{\sqrt{t}} = 0$$

所以函数 $h(t) = \frac{\log(t)\log(1-t)}{\sqrt{t}}$ 在 0 的某个邻域 $(0,\delta_1]$ 和 1 的某个邻域 $[1-\delta_2, 1)$ 内有界。而 $h(t)$ 在 $[\delta_1, \delta_2]$ 上显然也有界，所以 $h(t)$ 在整个 $(0,1)$ 上有界，设其为 C，于是

$$J = \int_0^1 \frac{h(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq C\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2C.$$

所以广义积分 J 收敛，于是 I 也收敛。

ii) 设 $f_n(t) = \log(t)t^{n-1}$，它在 $[0,1]$ 内恒负，求导得

$$f'(t) = t^{n-2}\left(1+(n-1)\log t\right),$$

所以 f_n 在 $[0,1]$ 内有唯一的驻点 $t_n = e^{-1/(n-1)}$，由此可得 f_n 在 $[0,1]$ 内的最小值为 $f_n(t_n) = -\frac{e^{-1}}{n-1}$。于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\log(t)}{n}t^{n-1}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n(n-1)} = e^{-1}.$$

由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[0,1]$ 上一致收敛。

iii) 只需证明 $J=\zeta(3)$。

$$\begin{aligned}
J=\int_0^1\frac{\log(t)\ \log(1-t)}{t}\mathrm{d}t&=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\log(t)\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t\\
&=-\int_0^1\log t\,\mathrm{d}t-\int_0^1\sum_{n=2}^{\infty}\log(t)\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t\\
&=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\log(t)t^{n-1}\mathrm{d}t\\
&=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left.\frac{t^n\left(n\log(t)-1\right)}{n^2}\right|_0^1\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\zeta(3).
\end{aligned}$$

因为 ii) 中已证明的一致收敛性，所以上述积分和求和可以换序。 □

（评分标准：i) 送 5 分。ii) 5 分。iii) 把 $\frac{1}{t(1-t)}$ 分开 2 分、逐项积分 2 分、最终结果 1 分。）

五、(20 分）设

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\cos(x^{\alpha})\mathrm{d}x.$$

i) 求证：对于 $\alpha_0>1$，$I(\alpha)$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛。

ii) 求极限

$$\lim_{\alpha\to+\infty}I(\alpha).$$

iii) 试计算 $I(\alpha)$。

解答： i) 将积分区域分为两块

$$I(\alpha)=I_1(\alpha)+I_2(\alpha)=\int_0^1\cos(x^{\alpha})\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\cos(x^{\alpha})\mathrm{d}x,$$

其中 $I_1(\alpha)$ 是正常的含参积分，当然收敛。对于 $I_2(\alpha)$，换元 $x^{\alpha}=t$ 得：

$$I_2(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_1^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}\mathrm{d}x,$$

其中 $\cos(t)$ 的变上限积分显然一致有界，而

$$\frac{1}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\alpha_0}}} \to 0, \quad t \to \infty,$$

所以 $\frac{1}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}$ 随着 t 的增长单调下降一致趋向于 0，于是由 Abel-Dirichlet 判别法，$I_2(\alpha)$ 对 $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ 一致收敛。

ii) 先考虑 $I_2(\alpha)$ 的极限，对于 $t \in [1, T]$，

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}} - \frac{\cos(t)}{t}\right| < \left|t^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right| < \log(T) T^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha},$$

所以当 $\alpha \to +\infty$ 时，$\frac{\cos(t)}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}$ 一致地趋向于 $\frac{\cos(t)}{t}$，所以（根据书上的某定理）

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}x,$$

上式右边是个有限数，而 $I_2(\alpha)$ 还有一个分母 α，所以 $\lim_{\alpha \to +\infty} I_2(\alpha) = 0$。

对于 $I_1(\alpha)$，任取 $\varepsilon \in (0, 1)$，对于 $x \in [0, 1-\varepsilon]$，有

$$|1 - \cos(x^\alpha)| = 2\sin^2 \frac{x^\alpha}{2} \leq \frac{x^{2\alpha}}{2} < \frac{(1-\varepsilon)^{2\alpha}}{2},$$

所以当 $\alpha \to +\infty$ 时，$\cos(x^\alpha)$ 一致地趋向于 1，所以

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{1-\varepsilon} \cos(x^\alpha) \, \mathrm{d}x = 1 - \varepsilon.$$

另一方面，显然有

$$-\varepsilon \leq \int_{1-\varepsilon}^1 \cos(x^\alpha) \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon,$$

由此不难得出

$$1 - 2\varepsilon \leq \liminf_{\alpha \to +\infty} I_1(\alpha) \leq \limsup_{\alpha \to +\infty} I_1(\alpha) \leq 1,$$

再令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\lim_{\alpha \to +\infty} I_1(\alpha) = 1$，所以 $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 1$。

iii) 令 $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$，换元 $t = x^\alpha$ 得

$$\begin{aligned}
\alpha\, I(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^\beta}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \cos(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}e^{-s\,t}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}\mathrm{d}s\int_0^\infty \cos(t)\,e^{-s\,t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{s^\beta}{1+s^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{\beta+1}{2}-1}}{1+u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\Gamma(\beta)}\frac{\pi}{\sin\frac{\beta+1}{2}\pi},
\end{aligned}$$

再利用一次余元公式不难得到

$$I(\alpha) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\cos\frac{\pi}{2\alpha}.$$

（注：此题过难，因此批改得比较松。第三问两个广义积分可以换序这一事实并不能从我们书上的定理直接推出，需要做更细致的分析，感兴趣的同学可以参考徐森林的书。） □

（评分标准：i) 拆区间 1 分、换元 1 分、知道要用 Abel-Dirichlet 1 分、一致有界 2 分、单调一致趋于零 2 分。ii) 两段区间上的处理各 4 分。iii) 5 分。）

六、(20 分)

i) 对自然数 n，定义

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2\,x^2},$$

求证:

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)\mathrm{d}x = 1,$$

且对任意的 $\delta > 0$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|>\delta} K_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

ii) 对自然数 n，定义

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} K_n(x-y)\sin^2 y\,\mathrm{d}y,$$

求证：$\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 $f(x) = \sin^2 x$。

解答: i) 两个定积分都可以直接算出来，略。ii) 即课上刚讲过的好核性质，略。 $\square$

（评分标准：i) 送 8 分。ii) 证明 $f(x)$ 一致连续 1 分、利用一致连续取 δ 1 分、分拆区间 2 分、两段区间上的处理各 4 分。）