数学分析（3）：第 8 次习题课

刘思齐

1. 若连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 在 $[-M,M]$ 以外为零、且其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 是绝对可积的，则 Fourier 反演公式的直观解释可按下述方式严格地证出。

i) 对任意的 $L>M$，可将 f 在 $[-L,L]$ 上的部分延拓为整个实轴上的周期为 $2L$ 的周期函数。求证：在 $[-L,L]$ 上有

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,e^{\pi\,i\,\frac{n}{L}x},\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-\pi\,i\,\frac{n}{L}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2L}\hat{f}\left(\frac{n}{2L}\right).$$

ii) 若函数 F 连续且绝对可积，则

$$\int_{\mathbb{R}}F(\xi)\mathrm{d}\xi=\lim_{K\to+\infty}\frac{1}{K}\sum_{n\in\mathbb{Z}}F\left(\frac{n}{K}\right).$$

iii) 由 i)、ii) 即可证明

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)\,e^{2\,\pi\,i\,\xi\,x}\mathrm{d}\xi.$$

解答： i) （此题条件有误，应改为“$\hat{f}$ 是 ε-慢速下降的”。）首先证明，f 的 Fourier 级数是绝对收敛的：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|=&\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2L}\hat{f}\left(\frac{n}{2L}\right)\right|\\ =&\frac{1}{2L}\left(\left|\hat{f}(0)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\hat{f}\left(\frac{n}{2L}\right)\right|+\left|\hat{f}\left(-\frac{n}{2L}\right)\right|\right)\right)\\ \le&\frac{1}{2L}\left(\left|\hat{f}(0)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{1+\left|\frac{n}{2L}\right|^{1+\varepsilon}}\right)\\ <&\frac{1}{2L}\left(\left|\hat{f}(0)\right|+2A\,(2L)^{1+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)<+\infty\end{aligned}$$

由 Weierstrass 判别法可知 f 的 Fourier 级数收敛到一个连续函数，因为 f 连续，根据均方收敛性的推论，f 的 Fourier 级数收敛到它自己。

ii) （此题条件也应改为“F 是 ε-慢速下降的”，否则右边的级数可能不收敛。）对任意的 $\varepsilon_0>0$，存在一个 $R_0>0$，使得对任意的 $R\ge R_0$，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}}F(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{-R}^{R}F(\xi)\mathrm{d}\xi\right|<\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

设 $K>1$，考虑如下和式：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{K}\sum_{|n|>RK}F\left(\frac{n}{K}\right)\right|\leq\frac{2}{K}\sum_{n>RK}\frac{A}{1+\left|\frac{n}{K}\right|^{1+\varepsilon}}\\
<&2AK^{\varepsilon}\sum_{n>RK}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<2AK^{\varepsilon}\int_{RK-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\varepsilon}}\\
=&2AK^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon(RK-1)^{\varepsilon}}=\frac{2A}{\varepsilon(R-\frac{1}{K})^{\varepsilon}}<\frac{2A}{\varepsilon(R-1)^{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

当 R 充分大时，上式右边可以任意地小，所以我们不妨假设 R_0 已经充分大，使得对任意的 $R\geq R_0$，以及 $K>1$，有

$$\left|\frac{1}{K}\sum_{n\in\mathbb{Z}}F\left(\frac{n}{K}\right)-\frac{1}{K}\sum_{|n|\leq RK}F\left(\frac{n}{K}\right)\right|=\left|\frac{1}{K}\sum_{|n|>RK}F\left(\frac{n}{K}\right)\right|<\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

于是我们得到：

$$\left|\frac{1}{K}\sum_{n\in\mathbb{Z}}F\left(\frac{n}{K}\right)-\int_{\mathbb{R}}F(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\leq\frac{2\varepsilon_0}{3}+\left|\frac{1}{K}\sum_{|n|\leq RK}F\left(\frac{n}{K}\right)-\int_{-R}^{R}F(\xi)\mathrm{d}\xi\right|,$$

而右边的和式基本上可以解释为右边的积分的一个 Riemann 和（左右端点要稍作处理，细节略），于是不难证明，当 K 充分大时，上式右边小于 ε_0，所以所求极限成立。

iii)，由 i)、ii) 易得。 □

2. 固定一个 $\varepsilon>0$，一个连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 叫做 ε-慢速下降的，如果存在 $A>0$ 使得

$$|f(x)|<\frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}.$$

所有这样的函数构成的集合记为 M_ε。求证：

i) M_ε 是一个线性空间。

ii) 若 $f(x)\in M_\varepsilon$，则对于 $\forall h\in\mathbb{R}$，$f(x-h)\in M_\varepsilon$。

iii) 若 $f(x)\in M_\varepsilon$，则对于 $\forall\delta\in\mathbb{R}$，$f(\delta x)\in M_\varepsilon$。

iv) 若 $f\in M_\varepsilon$，则 f 绝对可积（于是 $\hat{f}$ 存在）。

v) 若 $f\in M_\varepsilon$、$\hat{f}\in M_\varepsilon$，则存在 $B>0$，使得

$$|f(x+h)-f(x)|\leq B\,|h|^{\varepsilon}.$$

（即 ε-Hölder 连续。）

vi) 若 $f,g\in M_\varepsilon$，则 $f*g\in M_\varepsilon$。

解答： 见第 10 次作业的解答。 $\square$

3.

i) 若 f 是 ε-慢速下降的，则

$$\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\hat{f}(\xi)\,e^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}\xi=(f*\mathcal{F}_R)\,(x),$$

其中 $\mathcal{F}_R$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Fejér 核：

$$\mathcal{F}_R(y)=\begin{cases} R\left(\frac{\sin\pi\,y\,R}{\pi\,y\,R}\right)^2, & y\neq 0;\\[2ex] R, & y=0.\end{cases}$$

ii) 求证：当 $R\to+\infty$ 时，$f*\mathcal{F}_R$ 一致收敛到 f。

解答： i) 因为 f 是 ε-慢速下降的，所以 $\hat{f}(\xi)$ 作为含参广义积分对于 $\xi\in\mathbb{R}$ 一致收敛，所以有：

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\hat{f}(\xi)\,e^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}\xi\\
=&\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\left(\int_{\mathbb{R}}f(y)\,e^{-2\pi i\xi y}\mathrm{d}y\right)e^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}\xi\\
=&\int_{\mathbb{R}}f(y)\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)e^{2\pi i\xi\,(x-y)}\mathrm{d}\xi\\
=&\int_{\mathbb{R}}f(y)\,R\left(\frac{\sin\pi\,(x-y)\,R}{\pi\,(x-y)\,R}\right)^2\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

ii) 首先，利用换元法和一些已知的积分不难证明

$$\int_{\mathbb{R}}F_R(y)\,\mathrm{d}y=1.$$

接下来，对于 $\delta>0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{|y|>\delta}F_R(y)\,\mathrm{d}y=\int_{y>\delta}\frac{2\sin^2\pi\,y\,R}{\pi^2\,y^2\,R}\,\mathrm{d}y=\int_{y>\delta}\frac{1-\cos 2\,\pi\,y\,R}{\pi^2\,y^2\,R}\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{\pi^2\,R\,\delta}-\int_{y>\delta}\frac{\cos 2\,\pi\,y\,R}{\pi^2\,y^2\,R}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

由 Riemann-Lebesgue 引理，当 $R\to+\infty$ 时，上式右边趋于 0，所以 $\{F_R\}$ 是一个好核。于是由好核的性质可知，$f*\mathcal{F}_R$ 一致收敛到 f。 $\square$

4. 在本题中，我们取 Fourier 变换和反变换为：

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\,\xi\,x}\mathrm{d}x,\\
f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{i\,\xi\,x}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

i) 求证：$h_0(x) = e^{-x^2/2}$ 的 Fourier 变换等于它自己。

ii) 定义函数空间

$$V = \{p(x)h_0(x) \mid p \in \mathbb{C}[x]\},$$

则 V 是 Schwartz 空间 $\mathcal{S}$ 的子空间，并且是如下运算的不变子空间：

$$\begin{aligned}
&I : V \to V, \quad f(x) \mapsto f(x),\\
&X : V \to V, \quad f(x) \mapsto x\, f(x),\\
&D : V \to V, \quad f(x) \mapsto f'(x),\\
&F : V \to V, \quad f(x) \mapsto \hat{f}(x).
\end{aligned}$$

它们还满足如下关系：

$$D\,X - X\,D = I, \quad F\,D = i\,X\,F, \quad F\,X = i\,D\,F.$$

iii) 定义算子

$$A = D + X, \quad A^\dagger = -D + X,$$

若 $f \in V$ 满足 $F(f) = \lambda f$，则

$$F(A(f)) = i\,\lambda\,A(f), \quad F(A^\dagger(f)) = -i\,\lambda\,A^\dagger(f).$$

iv) F 在 V 上的全部特征向量由 $h_n = \left(A^\dagger\right)^n(h_0)$ 给出，其特征值为 $(-i)^n$。

解答： i)、ii)、iii) 直接计算即可。对于 iv)，由 iii) 可知 h_n 显然是相应特征值的特征向量。注意 $\{h_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ 构成 V 的一组基，所以 F 的特征向量全部由 h_n 的线性组合给出。 □