数学分析（3）：第 5 次习题课

刘思齐

记号约定: 设 $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ 是一个非退化闭区间, $R(I)$ 表示 I 上 Riemann 可积的复值函数的全体构成的线性空间。对于任意的 $p\geq 1$，定义一个 $R(I)$ 上的运算:

$$\|\cdot\|_p: R(I)\to\mathbb{R},\quad f\mapsto\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们在课堂上已经说过，运算 $\|\cdot\|_p$ 满足范数的大部分性质。如果规定 $R(I)$ 中的相等是几乎处处相等（或者把 $R(I)$ 重新定义为它模去几乎处处相等这个等价关系之后剩下的商空间），那么 $\|\cdot\|_p$ 就是一个范数，于是 $(R(I),\|\cdot\|_p)$ 构成一个赋范空间，记为 $R^p(I)$。

特别地，若 $I=[-\pi,\pi]$，我们记

$$R(S^1)=\{f\in R(I)\mid f(-\pi)=f(\pi)\}.$$

类似地，也可定义 $R^p(S^1)$。

1. 存在一个函数列 $\{f_n\}$，满足 $f_n\in R^p(I)$，$f_n\to f$（在 $\|\cdot\|_p$ 的意义下），但 f 是 I 上的无界函数。

解答:　比如 $I=[0,1]$，当 $p=1$ 时可取

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ \log(n), & 0<x\leq\frac{1}{n};\\ -\log(x), & \frac{1}{n}\leq x\leq 1.\end{cases}$$

那么不难证明 $\{f_n\}$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 是一个 Cauchy 列，但是 $\{f_n\}$ 的极限是无界但广义 Riemann 可积函数。

对其它的 $p>1$，将上述例子稍做修改，使得那个积分比较好估计即可。□

2. 存在一个函数列 $\{f_n\}$，满足 $f_n\in R^p(I)$，$f_n\to f$（在 $\|\cdot\|_p$ 的意义下），且 f_n 一致有界（于是 f 也有界），但 f 不是 I 上的 Riemann 可积函数。

解答:　将 $[0,1]$ 中的有理数排成一排

$$\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{r_1,r_2,\dots\},$$

定义

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,\dots,r_n\};\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 的极限是 Dirichlet 函数，因此不是 Riemann 可积的。而每个 $\{f_n\}$ 都几乎处处为零，所以当然在 $\|\cdot\|_p$ 的意义下是 Cauchy 列。

（注：上一题的反例也可用类似的函数列来构造。） $\square$

3. 设 $f \in R(S^1)$，$c_n \in \mathbb{C}$ 是它的 Fourier 系数。如果 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| < +\infty$，求证：$f$ 的 Fourier 级数一致收敛，且其和函数与 f 几乎处处相等。

解答： 课上已经讲过，系数绝对收敛的三角级数本身也绝对收敛，于是和函数 S 是连续的，因此 $S \in R(S^1)$。然后，函数 $S(x)\,e^{-i\,n\,x}$ 对应的级数也一致收敛，于是可逐项积分，由此不难知道 S 的 Fourier 系数也是 c_n。所以 f 和 S 具有相同的 Fourier 级数，由均方收敛性，当 $N \to \infty$ 时，有

$$\|f - S_N\|_2 \to 0, \quad \|S - S_N\|_2 \to 0,$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\|f - S\|_2 \le \|f - S_N\|_2 + \|S - S_N\|_2 < \varepsilon$$

所以 $\|f - S\|_2 = 0$，所以 f 和 S 几乎处处相等。 $\square$