数学分析（2）：第 8 次习题课

刘思齐

1. 设 $A > 0$。

   i) 求证：
   $$\left(\int_0^A \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{A^2}{\cos^2\theta}\right) \mathrm{d}\theta.$$
   （提示：在 $D = [0, A] \times [0, A]$ 上用极坐标计算左边的积分。）

   ii) 求证：
   $$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. （球和球壳的 Newton 势）设 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Jordan 可测有界闭区域，对于 $x \in \mathbb{R}^3 \backslash A$，定义
   $$\Phi_A(x) = -\int_A \frac{\mathrm{d}y}{\|y - x\|}.$$

   i) 设 $R > 0$，$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le R\}$，求 $\Phi_A(x)$；

   ii) 设 $R > r > 0$，$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r \le \|x\| \le R\}$，求 $\Phi_A(x)$。

3. （Newton-Gregory 猜想）

   i) 设 S_1 是 $\mathbb{R}^3$ 中半径为 R 的球，球心为 O；S_2 是半径为 r ($r < R$) 的球，球心在 S_1 上；C 是以 O 为顶点的与 S_2 相切的圆锥。求 S_1 被 C 截下来的球冠的面积。

   ii) 设 K_3 是与一个球相切且互不重叠的、和它等大的球的个数。求证：$K_3 \le 14$。

4. i) （Pappus-Guldinus 定理）设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$，$t \mapsto (a(t), b(t))$ 的像集是一条连续可微的简单曲线 C，且 $a(t) \ge 0$。设曲面 S 为
   $$x(t, \phi) = a(t)\cos\phi, \quad y(t, \phi) = a(t)\sin\phi, \quad z(t, \phi) = b(t),$$
   其中 $a \le t \le b$，$0 \le \phi \le 2\pi$。求证：
   $$\mu(S) = (2\,\pi\,R)\ \mu(C),$$
   其中 $\mu(S)$ 是 S 的面积，$\mu(C)$ 是 C 的长度，R 是 C 的重心的横坐标。

ii) 当 C 由一个连续可微函数的图像给出时，即 $a(t) = f(t)$，$b(t) = t$，求 $\mu(S)$ 的计算公式。

iii)（极小曲面）设 $f(a) = f(b) = H$，你能否猜到什么样的 f 会使 $\mu(S)$ 最小?

5. 设 $R > r > 0$，考虑环面 T:

$$x = (R + r\,\cos\theta)\cos\phi, \quad y = (R + r\,\cos\theta)\sin\phi, \quad z = r\,\sin\theta.$$

根据微分几何知识可以算出，环面上一点处的两个主曲率为:

$$\kappa_1 = \frac{\cos\theta}{R + r\cos\theta}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r}.$$

设 $K = \kappa_1\,\kappa_2$, $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$，分别叫做 Gauss 曲率和平均曲率。

i)（Gauss-Bonnet 公式）求积分 $\chi = \int_T K\mathrm{d}\sigma$（即课堂上讲的以被积函数为密度的“质量”）;

ii)（Willmore 能量）求积分 $W = \int_T H^2\mathrm{d}\sigma$（同上）;

iii)（Willmore 猜想）不妨设 $r = 1$，问: 当 R 为多少时，W 最小? 最小值是多少?