

数学分析 (2): 第 6 次习题课

刘思齐

1. 已知物理量 Y 与物理量 X_1, \dots, X_n 满足线性关系:

$$Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n.$$

现有实验数据点 $(y_i; x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$, $i = 1, \dots, m$, 满足 $m \geq n$. 请问: 当这些数据点满足何种条件时, 可求出 a_1, \dots, a_n 使得如下误差

$$u(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{j=1}^n a_j x_{i,j} \right)^2$$

最小。

2. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ 在闭区域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 25\}$$

上的最大、最小值。

3. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \bar{D} 上连续, 在 D 上二阶可微, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u.$$

求证:

- i) 若在 ∂D 上 $u \geq 0$, 则在 D 上亦有 $u \geq 0$;
 - ii) 若在 ∂D 上 $u > 0$, 则在 D 上亦有 $u > 0$.
4. 设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$,

$$f(x, y) = \alpha \log x - \beta x + \gamma \log y - \delta y.$$

- i) 求证: 函数 f 在 D 上具有唯一极大值 V_0 .
 - ii) 对于任意的 $V < V_0$, 求在约束条件 $f(x, y) = V$ 下 $u(x, y) = x$ 和 $v(x, y) = y$ 的最大值和最小值。
5. 设 $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个非常值多项式. $D \subset \mathbb{C}$ 是一个有界闭区域. 求证: 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto |P(z)|$ 的最大值一定在 ∂D 上取到。