数学分析（2）：第 5 次习题课

刘思齐

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f: D \to D$ 连续可微。若 f 满足对任意的 $x \in D$，$f(f(x)) = f(x)$。求证：$M = f(D)$ 是一个流形。

2. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^2(D)$。求证：f 是凸函数当且仅当对于任意的 $x \in D$，f 在 x 处的 Hesse 矩阵 $H_f(x)$ 是半正定的。特别地，如果对于任意的 $x \in D$，$H_f(x)$ 正定，则 f 严格凸。反之，如果 f 严格凸，你能否举出一个例子，其 $H_f(x)$ 不是处处正定的?

3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^2(D)$ 满足对于任意的 $x \in D$，$H_f(x)$ 正定。设 $x_0 \in D$ 是 f 的一个局部极小点。求证:

   i) x_0 是 f 在 D 内的唯一整体极小点；

   ii) 设 $q \in f(D)$ 不是 f 的最小值，则 $M = f^{-1}(q)$ 是一个超曲面。

4. （Legendre 变换）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^2(D)$ 满足对于任意的 $x \in D$，$H_f(x)$ 正定。

   i) 求证：对于每一点 $x_0 \in D$，存在它的开邻域 U，以及 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V，使得映射

   $$\phi : U \to V, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

   是一个微分同胚，其中 $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$。

   ii) 在 V 上定义函数

   $$\tilde{f} : V \to \mathbb{R}, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i - f(x_1, \ldots, x_n),$$

   其中 $(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$，计算 $\tilde{f}$ 的 Hess 矩阵 $H_{\tilde{f}}(\xi)$，并证明 $H_{\tilde{f}}(\xi)$ 是正定的。

   iii) 上述变换 $(x, f) \mapsto (\xi, \tilde{f})$ 叫做 Legendre 变换。求证：若对 $(\xi, \tilde{f})$ 再做一次 Legendre 变换则回到 (x, f)。

5. 构造一个光滑函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得它在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的驻点，且这个驻点是极大值点，但不是整个 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值点。