数学分析（2）：第 2 次习题课

刘思齐

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集，$x_0 \in D$。若 $f : D \to \mathbb{R}$ 的偏导数 f_x, f_y 在 x_0 的某开邻域内存在，且 f_x 在 x_0 处连续，求证：f 在 x_0 处可微。

2. （Hadamard 引理）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$x_0 \in D$，$f \in C^1(D)$。求证：存在 D 上的连续函数 $g_1, \dots, g_n$ 使得对任意的 $x \in D$，有
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x - x_0)_i, \quad g(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^1(D)$，求证：f 为凸函数当且仅当对任意的 $x, y \in D$，
$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x).$$

4. i) 设 $M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实矩阵的全体构成的线性空间，求证：行列式运算 $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个可微映射，并计算偏导数 $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A$，其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$。

   ii) 设 $A : [a, b] \to M_n(\mathbb{R})$，$t \mapsto A(t)$ 是一个可微映射，求证：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det A(t) = \mathrm{Tr}(A^*(t) \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}),$$
   其中 A^* 表示 A 的伴随矩阵。

5. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可微，若存在 $d_1, \dots, d_n, d_f \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，有
$$f(t^{d_1} x_1, \dots, t^{d_n} x_n) = t^{d_f} f(x_1, \dots, x_n),$$
   则称 f 是拟齐次的（若 $d_1 = \cdots = d_n = 1$，则称 f 为齐次的）。求证：f 是拟齐次的当且仅当 f 满足如下方程：
$$d_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + d_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = d_f f.$$