数学分析（2）：第 1 次习题课

刘思齐

1. i)（Lebesgue 数引理）设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 有界闭，$S = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 K 的一个开覆盖。求证：存在 $\sigma > 0$，使得只要 $E \subset \mathbb{R}^n$ 满足

$$E \cap K \neq \emptyset, \quad \mathrm{diam}(E) < \sigma,$$

就存在 $\alpha \in A$，使得 $E \subseteq U_\alpha$。

ii) 利用上述结论证明，如果 K 有界闭，则 K 紧。

2. i) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空，对于 $x \in \mathbb{R}^n$，定义 $d_E(x) = \inf\{d(x,y) \mid y \in E\}$。求证：$d_E$ 连续，且 $d_E^{-1}(0) = \bar{E}$。

ii)（Urysohn 引理）设 A、B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个不交的闭集，求证：存在一个连续函数 $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$，使得 $f|_A \equiv 1$、$f|_B \equiv 0$。

iii) 设 A、B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个不交的闭集，求证：存在 $\mathbb{R}^n$ 中不交的开集 U、V，使得 $A \subset U$、$B \subset V$。

3. （Tietze 延拓定理）设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，$D \subset X$ 在 X 中闭，$f : D \to \mathbb{R}$ 是 D 上的连续函数，求证：存在 X 上的连续函数 $F : X \to \mathbb{R}$，使得 $F|_D = f$，且

$$\sup_{x \in X} F(x) = \sup_{x \in D} f(x), \quad \inf_{x \in X} F(x) = \inf_{x \in D} f(x).$$

4. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f : D \to \mathbb{R}$ 连续。若 $\forall x_0 \in D$，$\exists \delta > 0$ 使得

$$f(x_0) = \min\{f(x) \mid x \in B_\delta(x_0)\},$$

求证：f 是常值函数。

5. i)（Banach 不动点定理）设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 闭，映射 $f : D \to D$ 满足：存在常数 $0 \leq c < 1$，使得

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y), \quad \forall x, y \in D.$$

求证：存在唯一的 $x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = x_0$。

ii) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 紧，映射 $f : D \to D$ 满足：

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y), \quad \forall x, y \in D.$$

求证：存在唯一的 $x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = x_0$。