数学分析（2）期末试题　　卷 A　　2015.06.30

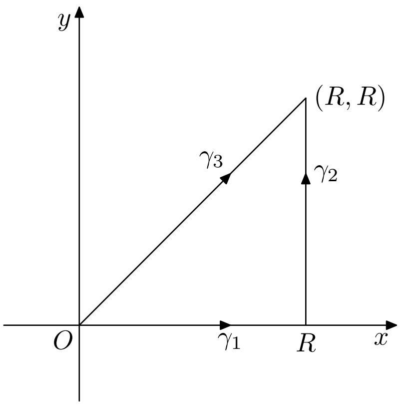
一、（15 分）设 $I \subseteq \mathbb{R}^n$、$J \subseteq \mathbb{R}^m$ 是两个非退化闭区间，K 是 $I \times J$ 中的紧集。对于 $x \in I$，定义 $K_x = \{y \in J \mid (x, y) \in K\}$。求证：若 K 是 Lebesgue 零测集，则对于几乎所有的 $x \in I$，K_x 是 J 中的 Lebesgue 零测集。

二、（15 分）设 D 是 $\mathbb{R}^5$ 中的如下区域：

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq 1 \end{array} \right\}.$$

计算 D 的体积，即 $\int_D \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \mathrm{d}x_5$。

三、（20 分）设 $R > 0$，γ_1、γ_2、γ_3 是如下图的三条道路：



ω_1、ω_2 是如下的微分形式：

$$\omega_1 = e^{y^2 - x^2} \left(\cos(2\,x\,y)\ \mathrm{d}x + \sin(2\,x\,y)\ \mathrm{d}y \right),$$
$$\omega_2 = e^{y^2 - x^2} \left(\sin(2\,x\,y)\ \mathrm{d}x - \cos(2\,x\,y)\ \mathrm{d}y \right).$$

i) 求证：

$$\int_{\gamma_3} \omega_i = \int_{\gamma_1} \omega_i + \int_{\gamma_2} \omega_i, \quad i = 1, 2.$$

ii) 求证：

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

iii) 计算广义积分：

$$C=\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x,\quad S=\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

四、（15 分）设 M 是如下曲面：

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2=1,\\ x^2+y^2-z^2\geq 0\end{array}\right\},$$

计算第二型曲面积分（定向由外法向量确定）：

$$\int_M\frac{x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

五、（15 分）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f:D\to\mathbb{R}^m$ 是 C^∞ 函数，$q\in\mathbb{R}^m$ 是 f 的正则值，$M=f^{-1}(q)$。求证：M 是可定向流形。

六、（20 分）设 $R>r>0$，如下参数方程给出 $\mathbb{R}^3$ 中的一条 Möbius 带：

$$\begin{cases}x=(R+v\sin\frac{u}{2})\cos u,\\ y=(R+v\sin\frac{u}{2})\sin u,\\ z=v\cos\frac{u}{2},\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}0\leq u\leq 2\pi\\ -r\leq v\leq r\end{pmatrix}$$

记它为 M。

i) 求证：∂M 是一个紧致无边连通一维流形。

ii) 计算 $\int_{\partial M}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 ∂M 的定向为绕 z 轴正向的逆时针方向。

iii) 求证：M 是不可定向的。

七、（10 分）(**附加题**）设 M 是如下流形：

$$M=\left\{(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^6\;\middle|\;\begin{array}{l}q_1^2+q_2^2+q_3^2=1,\\ p_1\,q_1+p_2\,q_2+p_3\,q_3=1\end{array}\right\},$$

ω、η 是如下微分形式：

$$\begin{aligned}\omega=&\frac{q_1\,\mathrm{d}q_2\wedge\mathrm{d}q_3+q_2\,\mathrm{d}q_3\wedge\mathrm{d}q_1+q_3\,\mathrm{d}q_1\wedge\mathrm{d}q_2}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{\frac{3}{2}}},\\ \eta=&\frac{q_1\,\mathrm{d}p_2\wedge\mathrm{d}p_3+q_2\,\mathrm{d}p_3\wedge\mathrm{d}p_1+q_3\,\mathrm{d}p_1\wedge\mathrm{d}p_2}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

求积分（请自寻定向使积分值为正）：

$$\int_M e^{-(p_1-q_1)^2-(p_2-q_2)^2-(p_3-q_3)^2}\,\omega\wedge\eta.$$