数学分析（2）期末试题参考答案

一、(15 分) 设 $I \subseteq \mathbb{R}^n$、$J \subseteq \mathbb{R}^m$ 是两个非退化闭区间，K 是 $I \times J$ 中的紧集。对于 $x \in I$，定义 $K_x = \{y \in J \mid (x, y) \in K\}$。求证：若 K 是 Lebesgue 零测集，则对于几乎所有的 $x \in I$，K_x 是 J 中的 Lebesgue 零测集。

解答：（证法一）因为 K 紧且 Lebesgue 零测，所以 Jordan 零测，于是 $\chi_K(x, y)$ 在 $I \times J$ 上 Riemann 可积，且有 $\int_{I\times J} \chi_K(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$。根据 Fubini 定理，积分 $F(x) = \int_J \chi_K(x, y)\mathrm{d}y$ 几乎处处存在。在 $F(x)$ 不存在的地方随意规定一些值，使得 $\underline{\int}_J \chi_K(x, y)\mathrm{d}y \le F(x) \le \overline{\int}_J \chi_K(x, y)\mathrm{d}y$，则 $F(x)$ 在 I 上 Riemann 可积，且有 $\int_I F(x)\mathrm{d}x = \int_{I\times J} \chi_K(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$。注意 $F(x) \ge 0$，所以，$F(x)$ 几乎处处为零。另一方面，根据 K_x 的定义，有 $F(x) = \int_J \chi_{K_x}(y)\mathrm{d}y$，所以 K_x 几乎处处 Jordan 可测，且其 Jordan 测度几乎处处为零。于是，对于几乎所有的 $x \in I$，K_x 是 J 中的 Lebesgue 零测集。

（证法二）定义集合 $E = \{x \in I \mid K_x \text{ 不是 Lebesgue 零测集}\}$，则 $E = \bigcup_{m\ge1} E_m$，其中

$$E_m = \left\{ x \in I \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{对任意覆盖 } K_x \text{ 的开区间 } J_1, J_2, \dots \\ \text{有 } \sum_{j\ge1} \mu(J_j) \ge \frac{1}{m}\text{。} \end{array} \right\}$$

要证 E 是 Lebesgue 零测集，只要证每个 E_m 是 Lebesgue 零测集。

假设某个 E_m 不是 Lebesgue 零测集，于是存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意覆盖 E_m 的开区间 $I_1, I_2, \dots$，有 $\sum_{i\ge1} \mu(I_i) \ge \varepsilon_0$。现在取一个 $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{m}$，因为 K 是紧的 Lebesgue 零测集，所以存在覆盖 K 的开区间 $K_1, \dots, K_\kappa$，使得 $\sum_{k=1}^{\kappa} \mu(K_k) < \varepsilon$。利用这些 $K_1, \dots, K_\kappa$ 的边界构造一个 $I \times J$ 的网格分划

$$\mathcal{P} = \{I_\alpha \times J_\beta \mid \alpha = 1, \dots, A,\ \beta = 1, \dots, B\},$$

不妨设 $\{I_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, A'\}$ 恰好覆盖 E_m，于是 $\sum_{\alpha=1}^{A'} \mu(I_\alpha) \ge \varepsilon_0$。对于每个 I_α $(1 \le \alpha \le A')$，取一个 $x_\alpha \in I_\alpha \cap E_m$，设 $J_{\beta_{x_\alpha,1}}, \dots, J_{\beta_{x_\alpha,\ell_\alpha}}$ 恰好覆盖 K_{x_α}，于是 $\sum_{\gamma=1}^{\ell_\alpha} \mu(J_{\beta_{x_\alpha,\gamma}}) \ge \frac{1}{m}$，所以我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{A'} \sum_{\gamma=1}^{\ell_\alpha} \mu\left(I_\alpha \times J_{\beta_{x_\alpha,\gamma}}\right) = \sum_{\alpha=1}^{A'} \mu(I_\alpha) \sum_{\gamma=1}^{\ell_\alpha} \mu\left(J_{\beta_{x_\alpha,\gamma}}\right) \ge \frac{\varepsilon_0}{m} > \varepsilon.$$

另一方面，对于每个 x_α，存在一个 K_k，使得 $x_\alpha \in K_k$。因为 $\mathcal{P}$ 是利用 $K_1, \dots, K_\kappa$ 的边界构造的网格分划，所以相应的 $I_\alpha \times J_{\beta_{x_\alpha,\gamma}}$ 一定包含在这个

K_k 中。再注意到 $I_\alpha \times J_{\beta_{x_\alpha},\gamma}$ 是两两不相交的，所以有

$$\sum_{\alpha=1}^{A'}\sum_{\gamma=1}^{\ell_\alpha}\mu\left(I_\alpha \times J_{\beta_{x_\alpha},\gamma}\right) \leq \sum_{k=1}^{\kappa}\mu(K_k) < \varepsilon,$$

矛盾！所以每个 E_m 都是 Lebesgue 零测集。证明完毕。 $\square$

（注：此题的逆命题亦成立，即：若对于几乎所有的 $x \in I$，K_x 是 J 中的 Lebesgue 零测集，则 K 是 Lebesgue 零测集。这个方向更难一些，所以没有作为考试题。这两个结论统称为 Lebesgue 零测集的 Fubini 定理，在证明最一般的 Sard 定理时会用到它。上面的证法一是标准做法，证法二则较难，它的基本想法类似于 Lebesgue 可积性定理的必要性部分。）

（评分标准：完全证出 15 分；明白要证什么但是没证出来 10 分；不明白要证什么但是知道什么是 Lebesgue 零测集 5 分。）

二、（15 分）设 D 是 $\mathbb{R}^5$ 中的如下区域：

$$D = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leq 1, \\ x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \leq 1 \end{array} \right\}.$$

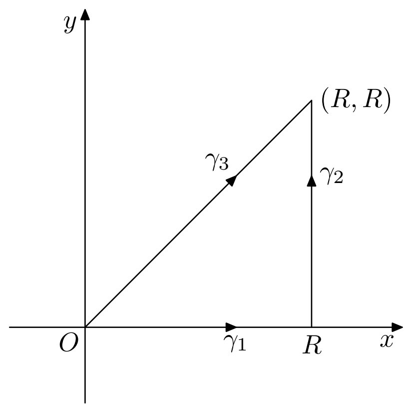
计算 D 的体积，即 $\int_D \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5$。

解答：

$$\begin{aligned}
&\int_D \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5 \\
=&\int_{x_2^2+x_3^2+x_4^2\leq 1}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\int_{|x_1|\leq\sqrt{1-\left(x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)}}\mathrm{d}x_1\int_{|x_5|\leq\sqrt{1-\left(x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)}}\mathrm{d}x_5 \\
=&\int_0^1 4\left(1-r^2\right)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
=&4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)4\pi = \frac{32}{15}\pi
\end{aligned}$$

$\square$

三、（20 分）设 $R > 0$，γ_1、γ_2、γ_3 是如下图的三条道路：



ω_1、ω_2 是如下的微分形式：

$$\begin{aligned}\omega_1 =& e^{y^2-x^2}\left(\cos\left(2\,x\,y\right)\,\mathrm{d}x+\sin\left(2\,x\,y\right)\,\mathrm{d}y\right),\\ \omega_2 =& e^{y^2-x^2}\left(\sin\left(2\,x\,y\right)\,\mathrm{d}x-\cos\left(2\,x\,y\right)\,\mathrm{d}y\right).\end{aligned}$$

i) 求证：

$$\int_{\gamma_3}\omega_i=\int_{\gamma_1}\omega_i+\int_{\gamma_2}\omega_i,\quad i=1,2.$$

ii) 求证：

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2}\omega_i=0,\quad i=1,2.$$

iii) 计算广义积分：

$$C=\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x,\quad S=\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

解答： i) 因为 $\omega_i\in\Omega^1\left(\mathbb{R}^2\right)$、$\mathrm{d}\omega_i=0$ $(i=1,2)$，所以由 Green 公式可知结论成立。

ii)（证法一）注意

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2}\omega_1\right|&=\left|\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin\left(2\,R\,y\right)\mathrm{d}y\right|\le\int_0^R e^{y^2-R^2}\mathrm{d}y,\\ \left|\int_{\gamma_2}\omega_2\right|&=\left|\int_0^R e^{y^2-R^2}\cos\left(2\,R\,y\right)\mathrm{d}y\right|\le\int_0^R e^{y^2-R^2}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

记 $I(R)=\int_0^R e^{y^2-R^2}\mathrm{d}y$，于是只要证 $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)=0$。任取 $\varepsilon>0$，则有

$$I(R)=\left(\int_0^{R-\varepsilon}+\int_{R-\varepsilon}^R\right)e^{y^2-R^2}\mathrm{d}y\le e^{-2\,R\,\varepsilon+\varepsilon^2}\left(R-\varepsilon\right)+\varepsilon,$$

于是 $\limsup\limits_{R\to+\infty}I(R)\le\varepsilon$，另一方面显然有 $\liminf\limits_{R\to+\infty}I(R)\ge0$，最后再令 $\varepsilon\to0$ 即可证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)=0$。

（证法二）上述极限还可通过 L'Hôspital 法则求得：

$$\lim_{R\to+\infty}I(R)=\lim_{R\to+\infty}\frac{\int_0^R e^{y^2}\mathrm{d}y}{e^{R^2}}=\lim_{R\to+\infty}\frac{e^{R^2}}{2\,R\,e^{R^2}}=0.$$

iii) 由 i)、ii) 可知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3}\omega_i=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}\omega_i$ $(i=1,2)$，其中

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3}\omega_1&=\int_0^{+\infty}\left(\cos\left(2\,t^2\right)+\sin\left(2\,t^2\right)\right)\,\mathrm{d}t,\\ \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3}\omega_2&=\int_0^{+\infty}\left(\sin\left(2\,t^2\right)-\cos\left(2\,t^2\right)\right)\,\mathrm{d}t,\\ \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}\omega_1&=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\\ \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}\omega_2&=\int_0^{+\infty}0\,\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

由此可解得

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(2\,t^2\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin\left(2\,t^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

再换元可得 $C = S = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$。 □

（注：C 和 S 称为 Fresnel 积分，在光学中有重要的应用。这里用的方法其实是复分析中的围道积分法。第 ii) 步证法一中的分割积分区间方法是非常标准的技术，在下一学期我们会经常用到它。）

（评分标准：第 i) 问 8 分；第 ii) 问 8 分；第 iii) 问 4 分。）

四、(15 分) 设 M 是如下曲面：

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2-z^2 \geq 0 \end{array} \right\},$$

计算第二型曲面积分（定向由外法向量确定）：

$$\int_M \frac{x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

解答： 这个第二型曲面积分其实就是在算 M 的面积，所以有

$$\int_M \frac{x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\,\pi.$$

□

五、(15 分) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f : D \to \mathbb{R}^m$ 是 C^∞ 函数，$q \in \mathbb{R}^m$ 是 f 的正则值，$M = f^{-1}(q)$。求证：M 是可定向流形。

解答： 由正则值定理，M 是一个 $d = n - m$ 维的流形，我们只需证明在 M 上存在定向相容的图册。

对于 M 上任意一点 p，存在 p 在 M 中的开邻域 U，使得 U 由参数方程 $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_d)$ $(i = 1, \ldots, n)$ 给出。记

$$\mathrm{e}_i = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_i}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)^T, \quad i = 1, \ldots, d,$$

则 $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d$ 构成 T_pM 的一组基。另一方面，设 f 的分量为 $(f_1, \ldots, f_m)$，记

$$\mathrm{n}_j = \nabla f_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)^T, \quad j = 1, \ldots, m,$$

则 $\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_m$ 构成 N_pM 的一组基。考虑矩阵

$$A = \left(\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_m, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d\right),$$

因为 $d + m = n$，所以它是方阵；因为它的列构成 $\mathbb{R}^n$ 的基，所以 $\det A \neq 0$。若 $\det A > 0$，我们称 U 及其上的参数表示是一个好地图；若 $\det A < 0$，我们

将 t_1 重新取为 $-t_1$，则又可得到一个好地图。所以，在 M 的每一点附近都存在一个好地图。

最后，我们来证明好地图之间一定是定向相容的。设 $p\in U\cap V$，其中 U、V 都是好地图，其上的坐标分别为 $t_1,\dots,t_d$ 和 $s_1,\dots,s_d$，则

$$A_U=\left(\mathrm{n}_1,\dots,\mathrm{n}_m,\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t_d}\right),$$
$$A_V=\left(\mathrm{n}_1,\dots,\mathrm{n}_m,\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s_1},\dots,\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s_d}\right),$$

记 $J=\frac{\partial(s_1,\dots,s_d)}{\partial(t_1,\dots,t_d)}$，则有

$$A_U=A_V\begin{pmatrix} I_m & 0\\ 0 & J\end{pmatrix},$$

因为 $\det A_U>0$、$\det A_V>0$，所以有 $\det J=\frac{\det A_U}{\det A_V}>0$。 □

（评分标准：完全证出 15 分；明白要证什么但是没证出来 10 分；不明白要证什么但是知道正则值定理 5 分。）

六、(20 分) 设 $R>r>0$，如下参数方程给出 $\mathbb{R}^3$ 中的一条 Möbius 带：

$$\begin{cases} x=(R+v\sin\frac{u}{2})\cos u,\\ y=(R+v\sin\frac{u}{2})\sin u,\\ z=v\cos\frac{u}{2},\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}0\le u\le 2\pi\\ -r\le v\le r\end{pmatrix}$$

记它为 M。

i) 求证：∂M 是一个紧致无边连通一维流形。

ii) 计算 $\int_{\partial M}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 ∂M 的定向为绕 z 轴正向的逆时针方向。

iii) 求证：M 是不可定向的。

解答：i) 记 (u,v) 到 (x,y,z) 的映射为 ϕ，定义 $U_i=\phi(V_i)$ $(i=1,\dots,4)$，其中

$$V_1=(0,2\pi)\times\left[-r,\frac{r}{2}\right),\quad V_2=(0,2\pi)\times\left(-\frac{r}{2},r\right],$$
$$V_3=(-\pi,\pi)\times\left[-r,\frac{r}{2}\right),\quad V_4=(-\pi,\pi)\times\left(-\frac{r}{2},r\right],$$

则每个 V_i $(i=1,\dots,4)$ 都微分同胚于 $\mathbb{H}^2$，于是 $\{(U_i,\phi)\mid i=1,\dots,4\}$ 构成 M 上的图册，使得 M 成为一个二维带边流形，于是它的边界 ∂M 是一个一维无边流形。∂M 可由如下参数方程表示：

$$\begin{cases} x=(R+r\sin\frac{u}{2})\cos u,\\ y=(R+r\sin\frac{u}{2})\sin u,\\ z=r\cos\frac{u}{2},\end{cases}\qquad (0\le u\le 4\pi)$$

因为 $[0,4\pi]$ 是紧致连通的，所以 ∂M 也是紧致连通的。

ii) 记 $\omega=\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，将 ∂M 的参数方程带入可得 $\omega=\mathrm{d}u$，于是

$$\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial M}\mathrm{d}u=4\,\pi.$$

iii) 假设 M 可定向，赋予 M 一个定向，使得 ∂M 上的诱导定向与 ii) 中一致（这总能做到，因为 ∂M 连通，所以 ∂M 上仅有两个定向。如果诱导定向与 ii) 中相反，只需将 M 的定向反号即可）。注意 $\mathrm{d}\omega=0$，根据 Stokes 定理，

$$4\,\pi=\int_{\partial M}\omega=\int_M\mathrm{d}\omega=\int_M 0=0,$$

矛盾！所以 M 不可定向。 □

（注：如果 M 不是 Möbius 带而是圆柱面，则 ∂M 有两个连通分支，其诱导定向刚好相反，使得 ω 在它们上面的积分相互抵消，于是第 iii) 问中的方法就不灵了（事实上，圆柱面显然是可定向的）。所以 ∂M 的连通性是整个证明的关键，第 i) 问其实就是要证这一点。对 ω 做曲线积分就是在数曲线绕着 z 轴正向转了多少角度，∂M 转了两圈，所以答案就是 $4\,\pi$。第 iii) 问的证法是非常巧妙的，对于其它不可定向曲面，要证明它们的不可定向性都要麻烦得多。）

（评分标准：第 i) 问 5 分；第 ii) 问 7 分；第 iii) 问 8 分。）

七、(10 分)（**附加题**）设 M 是如下流形：

$$M=\left\{(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^6\;\middle|\;\begin{array}{l}q_1^2+q_2^2+q_3^2=1,\\ p_1\,q_1+p_2\,q_2+p_3\,q_3=1\end{array}\right\},$$

ω、η 是如下微分形式：

$$\begin{aligned}\omega=&\frac{q_1\,\mathrm{d}q_2\wedge\mathrm{d}q_3+q_2\,\mathrm{d}q_3\wedge\mathrm{d}q_1+q_3\,\mathrm{d}q_1\wedge\mathrm{d}q_2}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{\frac{3}{2}}},\\ \eta=&\frac{q_1\,\mathrm{d}p_2\wedge\mathrm{d}p_3+q_2\,\mathrm{d}p_3\wedge\mathrm{d}p_1+q_3\,\mathrm{d}p_1\wedge\mathrm{d}p_2}{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

求积分（请自寻定向使积分值为正）：

$$\int_M e^{-(p_1-q_1)^2-(p_2-q_2)^2-(p_3-q_3)^2}\omega\wedge\eta.$$

解答： 用球坐标 (r,θ,φ) 表示 (q_1,q_2,q_3)：

$$q_1=r\,\sin\theta\,\cos\varphi,\quad q_1=r\,\sin\theta\,\sin\varphi,\quad q_3=r\,\cos\theta,$$

在单位球面的每个点处利用切向量和法向量重建关于 (p_1,p_2,p_3) 的坐标系：

$$\begin{aligned}p_1=&u\,\cos\theta\,\cos\varphi-v\,\sin\varphi+w\,\sin\theta\,\cos\varphi,\\ p_2=&u\,\cos\theta\,\sin\varphi+v\,\cos\varphi+w\,\sin\theta\,\sin\varphi,\\ p_3=&-u\,\sin\theta+w\,\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 $u, v, w \in \mathbb{R}$ 是新的坐标。于是，

$$\begin{aligned} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= r^2 = 1, \\ p_1\, q_1 + p_2\, q_2 + p_3\, q_3 &= r\, w = 1, \end{aligned}$$

所以 M 由 $r = w = 1$ 给出。在 M 上有:

$$\begin{aligned} &(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2 = u^2 + v^2, \\ &\omega \wedge \eta = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v, \end{aligned}$$

于是所求积分为:

$$\int_M e^{-u^2 - v^2} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 4\,\pi^2.$$

（注：M 实际上是在球面的每一点处配了一个切空间之后得到的流形，它叫球面的切丛，这是最简单的一类纤维丛。这个题目中涉及到的微分形式及其积分与代数拓扑中的 Poincaré 对偶、Thom 上同调类都有密切的联系，更多信息可参考 Bott 和 Tu 的 GTM 82。另外，这种特殊的微分形式叫 Mathai-Quillen 形式，它在拓扑量子场论中有重要的应用。）

□