数学分析（2）：第 6 次习题课

刘思齐

1. 已知物理量 Y 与物理量 $X_1, \ldots, X_n$ 满足线性关系：

$$Y = a_1 X_1 + \cdots + x_n X_n.$$

现有实验数据点 $(y_i; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$，$i = 1, \ldots, m$，满足 $m \geq n$。请问：当这些数据点满足何种条件时，可求出唯一的 $a_1, \ldots, a_n$ 使得如下误差

$$u(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{i,j} \right)^2$$

最小。

解答： 记 $A = (a_1, \ldots, a_n)^T$，$X = (x_{i,j})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$，$Y = (y_1, \ldots, y_m)^T$，则

$$u = (Y - X\,A)^T (Y - X\,A).$$

记 $\frac{\partial u}{\partial A} = (\frac{\partial u}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial a_n})^T$，不难求出

$$\frac{\partial u}{\partial A} = 2(X^T\,X\,A - X^T\,Y) = 0.$$

若 $\det(X^T\,X) \neq 0$，则上述方程有唯一解，即为 u 的唯一驻点 A_0。接下来，u 的 Hesse 矩阵为

$$H_u = 2X^T X,$$

它总是一个半正定矩阵，且当 $\det(X^T\,X) \neq 0$ 时正定，此时 A_0 即为所求。

所以数据点应满足 $\det(X^T\,X) \neq 0$。 □

（注：这就是所谓的最小二乘法，是多元统计的基础。）

2. 求函数 $f(x, y) = 2\,x^2 + 12\,x\,y + y^2$ 在闭区域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,y^2 \leq 25\}$$

上的最大、最小值。

解答： 参见教科书第 433 页的例 4（因为是非常典型的一类问题，所以包含在这里）。 □

3. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$，$u:\bar{D}\to\mathbb{R}$ 在 $\bar{D}$ 上连续，在 D 上二阶可微，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u.$$

求证：

i) 若在 ∂D 上 $u\geq 0$，则在 D 上亦有 $u\geq 0$；

ii) 若在 ∂D 上 $u>0$，则在 D 上亦有 $u>0$。

解答：　连续函数 u 在紧集 $\bar{D}$ 上必能达到最大值和最小值。

i) 假设存在一点 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $u(x_0,y_0)<0$，于是 u 在 $\bar{D}$ 上的最小值必在 D 内取到。在最小值点处，u 的 Hesse 矩阵应正定，于是必有 $u_{xx}>0$，$u_{yy}>0$。但 $u_{xx}+u_{yy}=u<0$，矛盾。

ii) 设 u 在 $\bar{D}$ 上的最小值为 m。设函数 $u_0=e^x+e^y$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M。取一个 $\varepsilon>0$ 使得 $m-\varepsilon M>0$。考虑函数 $\tilde{u}=u-\varepsilon u_0$，它满足第 i) 条的条件，所以 $\tilde{u}\geq 0$，于是 $u\geq\varepsilon u_0>0$。 □

4. 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,y>0\}$，

$$f(x,y)=\alpha\log x-\beta x+\gamma\log y-\delta y.$$

i) 求证：函数 f 在 D 上具有唯一极大值 V_0。

ii) 对于任意的 $V<V_0$，求在约束条件 $f(x,y)=V$ 下 $u(x,y)=x$ 和 $v(x,y)=y$ 的最大值和最小值。

解答：　i) 易知函数 $-f$ 在 D 上有唯一驻点 $\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\gamma}{\delta}\right)$，且严格凸，所以 f 有唯一极大值

$$V_0=\alpha\log\frac{\alpha}{\beta}-\alpha+\gamma\log\frac{\gamma}{\delta}-\gamma.$$

ii) 利用 Lagrange 乘子法不难求出 u 的极值点满足 $y_0=\frac{\gamma}{\delta}$，相应的最大最小值即方程 $f(x,y_0)=V$ 的两个根（利用凸性可证明有且仅有两根）。利用 Lambert 函数 $W(z)$ 可表示出这两个根来。函数 v 同理。 □

（注：这个例子给出了 Lotka-Volterra 方程的解曲线，这是一个二元一阶非线性常微分方程，经常用来描述自然界中掠食者与猎物数量的周期性变化。）

5. 设 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个非常值多项式。$D\subset\mathbb{C}$ 是一个有界闭区域。求证：函数 $f:D\to\mathbb{R},\ z\mapsto|P(z)|$ 的最大值一定在 ∂D 上取到。

解答：　假设最大值在 $z_0\in\mathring{D}$ 处取到，根据课堂上证明的多项数函数的开映射定理，P 将 z_0 的某个开邻域 U 映为 $P(z_0)$ 的开邻域 V，在 V 中不难找到一点 w_1 使得 $|w_1|>f(z_0)$，设 $z_1\in U$ 使得 $w_1=P(z_1)$，于是 $f(z_1)>f(z_0)$，矛盾。 □