数学分析（2）：第 3 次习题课

刘思齐

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，求证：D 连通当且仅当 D 道路连通。

解答：　道路连通可推出连通，所以只需证明 $\mathbb{R}^n$ 中的区域是道路连通的。

任取 $x_0 \in D$，设 $A = \{x \in D \mid \text{存在道路连接 } x \text{ 和 } x_0\}$。设 $x \in A$，因为 D 开，所以存在 $\delta > 0$，使得 $B_\delta(x) \subseteq D$。$B_\delta(x)$ 中的任意点 y 都可通过直线段与 x 相连，因为存在道路连接 x 和 x_0，所以将两条道路接起来就可得到从 x_0 到 y 的道路，所以 $B_\delta(x) \subseteq A$，因此 A 是开集。另一方面，设 $\{x_k\}$ 是 A 中的点列，它们收敛到某 $x \in D$。类似的，我们先选取一个 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x) \subseteq D$，然后，根据收敛的性质，必存在某个 $x_k \in B_\delta(x)$。现在，x_0 到 x_k 存在道路，x_k 可以通过直线段和 x 相连，因此 $x \in A$，这说明 A 是闭集。综上所述，A 是 D 中既开又闭的非空子集，因为 D 连通，所以 $D = A$，因此 D 道路连通。 $\square$

（注：这个问题的证明方法是处理有关区域的性质的典型方法，我们课堂上已经举过一个例子，这里再举一个。）

2. （高维 Rolle 定理）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ 连续且在 D 上可微。求证：若 f 在 ∂D 上恒为零，则存在 $x_0 \in D$ 使得 $f'(x_0) = 0$。

解答：　因为 $\bar{D}$ 是紧集，所以 f 必在 $\bar{D}$ 上达到极大值或极小值。若存在 $x \in D$ 使 $f(x) > 0$，则极大值必然不在边界上取到，于是，根据 Fermat 引理，在极大值点处就有 $f' = 0$。同理，若存在 $x \in D$ 使 $f(x) < 0$，则极小值点即是所求。若对任意的 $x \in D$ 有 $f(x) = 0$，那么在 D 的每一点处都有 $f' = 0$。 $\square$

3. 举例说明：在反函数定理中，如果 f 仅可微，而非连续可微，则定理不成立。

解答：　我们需要构造这样的函数：它在某点处导数存在但不连续、导数值非零，且在该点附近不是微分同胚。下面这个函数就是这样的例子：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

易知

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

注意 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 附近无限次变号，所以在 $x = 0$ 的任意邻域内 f 不单调，所以不可能是双射，因此也就不是微分同胚。 $\square$

4. 求如下 $\mathbb{R}^n$ 中的球坐标变换的 Jacobi 行列式：

$$\begin{aligned}
&x_1 = r\cos\theta_1,\\
&x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\cdots\cdots\\
&x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
&x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

解答： 设相应的行列式为 $J_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$，我们将通过一个简单的坐标变换将问题化为一个递推关系。设 $u = r\cos\theta_1$, $v = r\sin\theta_1$，则有：

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})} = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(u,v,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}\frac{\partial(u,v,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{\partial(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})},$$

经过简单的计算，上式给出

$$J_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = r\,J_{n-1}(v,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}),$$

然后不难用归纳法证明

$$J_n(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}.$$

□

（注：此行列式以后大有用处。另外，如果不用这种变换法，也可通过观察要计算的行列式直接发现上述递推关系。）

5. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，K 是 D 中的一个紧集。$f: D \to \mathbb{R}^n$ 连续可微，满足 f 在 K 上是单射，且 $\det f'$ 在 K 上恒不为零。求证：存在 D 中包含 K 的开集 U，使得 $f: U \to f(U)$ 是同胚，且其逆 f^{-1} 连续可微。

解答： 首先考虑函数 $g: K \to \mathbb{R}$，$g(x) = d(x,\partial D)$，它是紧集上的连续函数，所以必在某点 x_0 达到最小值。若 $g(x_0) = 0$，因为 ∂D 闭，所以必有 $x_0 \in \partial D$。但 $K \cap \partial D = \emptyset$，矛盾。所以必有 $g(x_0) > 0$。我们记 $d_0 = g(x_0)$。

接下来，定义 $K_m = \{x \in D \mid d(x,K) \le \frac{d_0}{m}\}$，其中 $m = 2,3,\ldots$。显然 K_m 都是 D 中包含 K 的紧集，下证：当 m 充分大时，f 在 K_m 上是单射。假设结论不真，那么对任意的 $m \ge 2$，存在一对 $x_m, y_m \in K_m$，满足 $x_m \ne y_m$，且 $f(x_m) = f(y_m)$。根据极限点定理，我们不妨假设 $\{x_m\},\{y_m\}$ 已经选为它们的收敛子列，并设 $x_m \to x_1$、$y_m \to y_1$。因为 K_m 都是闭集，所以必有 $x_1, y_1 \in \bigcap_{m\ge 2} K_m = K$。根据 f 的连续性，应有 $f(x_1) = f(y_1)$；因为 f 在 K 上单，所以必有 $x_1 = y_1$。注意 $\det f'(x_1) \ne 0$，根据反函数定理，f 在 x_1 的一个邻域内是单射。但是，这个邻域内必然会包含一对 x_m、y_m，矛盾！

用上面类似的方法可以证明：当 m 充分大时，$\det f'$ 在 K_m 上恒不为零，此处略。

最后，对一个充分大的 m，选取 $U = \mathring{K}_m$，则 f 在 U 上单，且 $\det f'$ 在 U 上恒不为零，所以 f 在 U 上是微分同胚。 $\square$

（注：当 K 为单点集时，上述结论退化为反函数定理，所以它可视为反函数定理中的点 x_0 变胖成为紧集 K 的推广。这里采用的证明方法对于区域中的紧子集是非常典型的。这类问题很难用紧集的有限覆盖性质证明，用极限点则方便得多。）