数学分析（2）：第 1 次习题课

刘思齐

1.

i)（Lebesgue 数引理）设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 有界闭，$S = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 K 的一个开覆盖。求证：存在 $\sigma > 0$，使得只要 $E \subset \mathbb{R}^n$ 满足

$$E \cap K \neq \emptyset, \quad \mathrm{diam}(E) < \sigma,$$

就存在 $\alpha \in A$，使得 $E \subseteq U_\alpha$。

ii) 利用上述结论证明，如果 K 有界闭，则 K 紧。

解答：　i) 假设不存在这样的 $\sigma > 0$，于是对于每个 $\delta_k = 1/k$ $(k = 1, 2, \dots)$，存在一个集合 E_k 满足 $E_k \cap K \neq \emptyset$、$\mathrm{diam}(E_k) < \delta_k$，且 E_k 不在任何一个 U_α 中。取点列 $x_k \in E_k \cap K$ $(k = 1, 2, \dots)$，因为 K 有界闭，所以有子列 $\{x_{k_i}\}$ 收敛到某个 $x_0 \in K$。设 $x_0 \in U_\alpha$，于是存在 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(x_0) \subseteq U_\alpha$。因为 $\{x_{k_i}\}$ 收敛到 x_0，所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于任意的 $i > N$，有 $d(x_{k_i}, x_0) < \delta/2$。取一个 $i > N$ 使得 $k_i > 2/\delta$，于是对于任意的 $y \in E_{k_i}$，有

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_{k_i}) + d(x_{k_i}, x_0) < \frac{1}{k_i} + \frac{\delta}{2} < \delta,$$

所以 $E_{k_i} \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq U_\alpha$，这与 E_k 的取法矛盾。

ii) 设 S 是 K 的一个开覆盖，σ 是相应的 Lebesgue 数。因为 K 有界，所以可以用一个 n 维闭区间 $[a, b]$ 覆盖。将 $[a, b]$ 的每条边 m 等分，于是 $[a, b]$ 可分为 m^n 个小闭区间的并。当 m 充分大时，可使这些小区间的直径小于 σ。设这些小区间中与 K 有非空交的为 $I_1, \dots, I_k$，则每个 I_i 被 S 中的某个 U_i 覆盖，于是

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

所以 K 是紧的。 □

2.

i) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空，对于 $x \in \mathbb{R}^n$，定义 $d_E(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in E\}$。求证：$d_E$ 连续，且 $d_E^{-1}(0) = \bar{E}$。

ii) (Urysohn 引理) 设 A、B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个不交的闭集，求证：存在一个连续函数 $f:\mathbb{R}^n \to [0,1]$，使得 $f|_A \equiv 1$、$f|_B \equiv 0$。

iii) 设 A、B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个不交的闭集，求证：存在 $\mathbb{R}^n$ 中不交的开集 U、V，使得 $A \subset U$、$B \subset V$。

解答：　i) 任取 $x, y \in \mathbb{R}^n$、$z \in E$，于是有三角不等式 $d(x,z) \le d(y,z) + d(x,y)$，因为 $d(x,z) \ge d_E(x)$，所以有 $d(y,z) \ge d_E(x) - d(x,y)$，这说明 $d_E(x) - d(x,y)$ 是 $\{d(y,z) \mid z \in E\}$ 的一个下界，所以有 $d_E(y) \ge d_E(x) - d(x,y)$。由 x、y 的对称性可知 $|d_E(x) - d_E(y)| \le d(x,y)$，所以 d_E 一致连续，因此连续。

由定义知 $E \subseteq d_E^{-1}(0)$，因为 d_E 连续，所以 $d_E^{-1}(0)$ 闭，于是 $\bar{E} \subseteq d_E^{-1}(0)$。反之，若有 $x \notin E$ 满足 $d_E(x) = 0$，由下确界性质可知，对任意的 $\delta > 0$，存在 $y \in E$，使得 $d(x,y) < \delta$，所以 x 是 E 的极限点，于是 $d_E^{-1}(0) \subseteq \bar{E}$。

ii) 取 $f(x) = \frac{d_B(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$。因为 A 是闭集，所以 $d_A(x) = 0$ 当且仅当 $x \in A$，对 B 同理。因为 A、B 不交，所以 $f(x)$ 的分母恒不为零。于是 f 连续，且满足题目的要求。

iii) 对于上述 f，取 $U = f^{-1}((2/3,1])$、$V = f^{-1}([0,1/3))$ 即可。 $\square$

(注：Urysohn 引理是点集拓扑中的重要结果，它对所有正规空间都成立。上述结果只是最一般的 Urysohn 引理在距离空间中的特殊情况，在这种情况下它几乎是平凡的。)

3. (Tietze 延拓定理) 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，$D \subset X$ 在 X 中闭，$f: D \to \mathbb{R}$ 是 D 上的连续函数，求证：存在 X 上的连续函数 $F: X \to \mathbb{R}$，使得 $F|_D = f$，且

$$\sup_{x\in X} F(x) = \sup_{x \in D} f(x), \quad \inf_{x\in X} F(x) = \inf_{x\in D} f(x).$$

解答：　不妨设 f 的值域就是开区间 $(0,1)$。若不然，可以先考虑 $\tilde{f} = h \circ f$，其中 h 是 $\mathbb{R}$ 到 $(0,1)$ 的同胚。$\tilde{f}$ 的值域是 $(0,1)$，若我们能够得到它的延拓 $\tilde{F}$，再取 $F = h^{-1} \circ \tilde{F}$ 即可。

对于 $x \in X$，记 $d(x) = d_D(x)$ (定义见上题)。对于 $r \ge d(x)$，定义

$$M_x(r) = \sup\{f(y) \mid y \in D \cap B_r(x)\},$$

则 $M_x(r)$ 满足 $0 \le M_x(r) \le 1$，且单调增，于是 Riemann 可积。当 $x \in D$ 时，定义 $F(x) = f(x)$；当 $x \notin D$ 时，定义

$$F(x) = \frac{1}{d(x)} \int_{d(x)}^{2d(x)} M_x(r)\mathrm{d}r$$

(注意 D 是闭集，所以上式分母大于零)。$F(x)$ 显然满足 $0 \le F(x) \le 1$，所以下面只需证明 F 连续。

若 x_0 是 D 的内点，则 F 在 x_0 附近的取值与 f 相同，所以由 f 在 x_0 处的连续性可知 F 的连续性。

若 x_0 是 D 的边界点，注意 D 是闭的，所以 $x_0 \in D$。任取一个 $x \notin D$，根据定积分的性质以及 $M_x(r)$ 的单调性，有

$$F(x) \le M_x(2d(x)) = \sup\{f(y) \mid y \in D \cap B(x; 2d(x))\},$$

为了便于阅读，我们把 $B_r(x)$ 写成了 $B(x;r)$，下同。注意 $B(x;2d(x)) \subseteq B(x_0; 3d(x, x_0))$，所以

$$F(x) \le \sup\{f(y) \mid y \in D \cap B(x_0; 3d(x, x_0))\}.$$

用类似的方法可以证明

$$F(x) \ge \inf\{f(y) \mid y \in D \cap B(x_0; 2d(x, x_0))\}.$$

因为 f 连续，所以当 $x \to x_0$ 时上面两个不等式的右端的极限都是 $f(x_0)$，所以 F 在 x_0 处连续。

若 x_0 是 D 的外点，记 $d_0 = d(x_0)$，对充分小的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon\, d_0/5$。对任意的 $x \in B_\delta(x_0)$，记 $d = d(x)$，$h = d(x, x_0)$，于是有 $|d - d_0| \le h$（见上题第一问的证明）。因为 $B_{r-h}(x_0) \subset B_r(x) \subset B_{r+h}(x_0)$，所以有

$$M_{x_0}(r-h) \le M_x(r) \le M_{x_0}(r+h).$$

因此

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= \frac{1}{d}\int_d^{2d} M_x(r)\mathrm{d}r - \frac{1}{d_0}\int_{d_0}^{2d_0} M_{x_0}(r)\mathrm{d}r \\
&\le \frac{1}{d_0-h}\int_{d_0-h}^{2d_0+2h} M_{x_0}(r+h)\mathrm{d}r - \frac{1}{d_0}\int_{d_0}^{2d_0} M_{x_0}(r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{d_0-h}\int_{d_0}^{2d_0+3h} M_{x_0}(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{d_0}\int_{d_0}^{2d_0} M_{x_0}(r)\mathrm{d}r \\
&= \left(\frac{1}{d_0-h} - \frac{1}{d_0}\right)\int_{d_0}^{2d_0} M_{x_0}(r)\mathrm{d}r + \frac{1}{d_0-h}\int_{2d_0}^{2d_0+3h} M_{x_0}(r)\mathrm{d}r \\
&\le \frac{h}{d_0(d_0-h)}(2d_0 - d_0) + \frac{1}{d_0-h}(2d_0+3h-2d_0) \\
&= \frac{4h}{d_0-h} < \varepsilon
\end{aligned}$$

用类似的方法朝另一个方向放缩可得 $F(x_0) - F(x) < \varepsilon$，所以 F 连续。 □

（注：Tietze 延拓定理也是点集拓扑中的重要结果，它对所有正规空间都成立，Urysohn 引理则是它的简单推论。在点集拓扑中，通常是利用 Urysohn 引理逐次逼近得到 F，但那个做法需要用到我们尚未讲到的一致收敛的概念。我们在这里证明的是欧式空间中的版本，因为有距离函数，所以可以直接写出结果。这类延拓还有其它构造方式，这里只是选了一种比较简单的。）

4. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f : D \to \mathbb{R}$ 连续。若 $\forall x_0 \in D$，$\exists \delta > 0$ 使得

$$f(x_0) = \min\{f(x) \mid x \in B_\delta(x_0)\},$$

求证：f 是常值函数。

解答：　包含于 D 的、全部端点坐标为有理数的闭区间的全体是可数的，设它们为 $I_1, I_2, \dots$。因为 f 连续，所以在每个 I_i 上有最小值，记之为 m_i。对于 D 中的任意一点 x_0，存在开球 B 使得 $f(x_0)$ 是 f 在 B 上的最小值。存在某个 I_i 使得 $x_0 \in I_i \subseteq B$，于是 $f(x_0)$ 也是 f 在 I_i 上的最小值，所以 $f(x_0) = m_i$。因为 $\{m_i\}$ 是可数的，所以 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}$ 的可数子集。若 f 不是常数函数，根据介值定理，$f(D)$ 不可数，矛盾。 □

（注：若不加连续性条件，仍可证明这样的 f 的值域是可数的。不同之处在于，那时要先证明这样的 f 在紧集上一定能取到最小值，这是有限覆盖性质的简单推论。）

5.

i)（Banach 不动点定理）设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 闭，映射 $f : D \to D$ 满足：存在常数 $0 \le c < 1$，使得

$$d(f(x), f(y)) \le c\, d(x, y), \quad \forall x, y \in D.$$

求证：存在唯一的 $x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = x_0$。

ii) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 紧，映射 $f : D \to D$ 满足：

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in D.$$

求证：存在唯一的 $x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = x_0$。

解答：　i) 任取 $x_1 \in D$，定义 $x_{k+1} = f(x_k)$，由数学归纳法不难证明：

$$d(x_{k+1}, x_k) \le c^{k-1} d(x_2, x_1),$$

于是利用等比数列求和可得：

$$d(x_{k+p}, x_k) \le d(x_{k+p}, x_{k+p-1}) + \cdots + d(x_{k+1}, x_k) \le \frac{c^{k-1}}{1-c} d(x_2, x_1),$$

所以 $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列，设其极限为 x_0，因为 f 连续，所以有

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(x_0),$$

于是 x_0 是 f 的不动点。

若有两个不动点 x、y，则有

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le c\, d(x, y),$$

于是 $d(x,y)\le 0$，根据距离函数的正定性，只能有 $x=y$。

ii) 唯一性与第一问类似，下面只证存在性。设 $g(x)=d(x,f(x))$，则 g 是 D 上的连续函数。因为 D 紧，所以有最小值。设 $g(x_0)=y_0$。若 $y_0>0$ 则 $g(f(x))=d(f(x),f(f(x)))<d(x,f(x))=g(x)=y_0$，这和 y_0 最小矛盾，所以必有 $y_0=0$，于是 $x_0=f(x_0)$。 □

（注：Banach 不动点定理又称压缩映照原理，它是非常重要的工具，我们以后会经常用到它。）