数学分析（1）：第 3 次作业

刘思齐

1. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足：

    i) 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$；

    ii) 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，$x<y$，有 $f(x)<f(y)$。

    则存在 $c\in\mathbb{R}$，$c>0$，使得 $f(x)=c\,x$。（提示：c 就是 $f(1)$。）

2. 设 $\mathbb{Q}(x)$ 是系数为有理数的有理函数的全体，即：

    $$\mathbb{Q}(x)=\{R(x)=\frac{a_0+a_1\,x+\cdots+a_n\,x^n}{b_0+b_1\,x+\cdots+b_m\,x^m}\},$$

    其中 $n,m\in\mathbb{N}$, $a_i\ (i=0,\ldots,n)$, $b_j\ (j=0,\ldots,m)\in\mathbb{Q}$, $a_n\neq 0, b_m\neq 0$, 则 $\mathbb{Q}(x)$ 上有自然的加减乘除运算，使它成为一个域。

    现在定义一个序：$R_1<R_2$ 当且仅当 $R_2-R_1>0$，而 $R>0$ 当且仅当它的零头项系数满足 $a_n/b_m>0$。求证：$(\mathbb{Q}(x),<)$ 是一个全序域，并且不满足阿基米德性质。（注意：域性质不用证，只要证明 $<$ 是全序，并且满足跟序有关的两条运算性质即可。）

3. 求证：

    i) 若 $|S|=|\mathbb{R}|$，$X\subseteq S$ 且 $|X|=|\mathbb{N}|$，则 $|S-X|=|\mathbb{R}|$。（提示：取 S 的一个可数子集 Y 满足 $X\cap Y=\emptyset$（为什么存在？），注意 $|Y|=|X\cup Y|$（为什么？），于是可以构造出一个单射 $S\to S-X$（如何造？）。）

    ii) 利用与 i) 类似的方法证明 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 等势。

    iii) 利用无穷小数证明 $\mathbb{R}$、$[0,1]^2$ 和 $[0,1]$ 等势。（提示：$[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 有显然的单射。$\mathbb{R}$ 中元素可分成整数部分和小数部分，整数部分与 $[0,1]$ 中的有理数等势，小数部分则与另一个 $[0,1]$ 等势，于是有 $\mathbb{R}$ 到 $[0,1]^2$ 的单射。对于一对 $[0,1]$ 中的小数，可以把它们的位视为另一个小数的奇数位和偶数位，所以有 $[0,1]^2$ 到 $[0,1]$ 的单射。）

    iv) 利用 iii) 证明：对任意的非零自然数 n，$\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}$ 等势。

4. 设 $\mathbb{F}$ 是一个具有阿基米德性质的全序域，如果在 $\mathbb{F}$ 上闭区间套定理成立，求证 $\mathbb{F}$ 序完备。（提示：设 A 是非空有上界集合，$a_0\in A$，b_0 是 A 的上

界。若 a_0 是 A 的上界，那么它自动是上确界（第一次的作业题），无需再证什么。所以可假设 a_0 不是 A 的上界。接下来对区间 $I_0 = [a_0, b_0]$ 进行不断地二分，确保每次挑出来的区间都满足“左端点不是上界且右端点是上界”这种性质，最后证明所有区间的唯一公共点就是 A 的上确界。）