数学分析（1）：第 2 次作业

刘思齐

1. 对于 $n \in \mathbb{N}$，$n \neq 0$，定义

   $$Q_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \ \wedge \ a_n \neq 0)\},$$

   显然 Q_1 就是 $\mathbb{Q}$，我们在课堂上利用函数 h 证明了 $|Q_1| = |\mathbb{N}|$。

   i) 用类似的方法证明：对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$n \neq 0$，有 $|Q_n| = |\mathbb{N}|$。

   ii) 设 $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$，求证：$|Q| = |\mathbb{N}|$。

2. 对任意集合 X，求证：$|\mathcal{P}(X)| = |2^X|$。其中 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的幂集，2^X 表示从 X 到 $2 = \{0, 1\}$ 的函数的全体。

3. 在 $\mathbb{N}$ 上定义一个二元运算：$\star : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足：

   $$0 \star m := m, \quad n' \star m := (n \star m)' + m.$$

   求证：

   i) 对任意的 $n, m \in \mathbb{N}$，$n \star m = m \star n.$

   ii) 对任意的 $n, m, k \in \mathbb{N}$，$(n \star m) \star k = n \star (m \star k).$

   iii) 对任意的 $n, m, k \in \mathbb{N}$，$n \star m + n \star k = n \star (m + k) + n.$

   iv) 若 $n \star m = 0$，则必有 $n = m = 0$。

4. 设 $\mathbb{F} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 是我们在课堂上定义个那个全序域，回忆一下：

   $$\begin{aligned}
   &0_{\mathbb{F}} := (0, 0), \quad 1_{\mathbb{F}} := (1, 0), \\
   &(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \\
   &(a, b) \cdot (c, d) := (ac + 2bd, ad + bc), \\
   &(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow \text{以下四种情况之一成立：} \\
   &\qquad i) \quad a \leq c, \quad b < d; \\
   &\qquad ii) \quad a < c, \quad b \leq d; \\
   &\qquad iii) \quad a > c, \quad b < d, \quad (a - c)^2 < 2(b - d)^2; \\
   &\qquad iv) \quad a < c, \quad b > d, \quad 2(b - d)^2 < (a - c)^2.
   \end{aligned}$$

   则，

i) 求 $A = \{x \in \mathbb{F} \mid x^2 < (2, 0)\}$ 在 $\mathbb{F}$ 中的上确界和下确界。

ii) 求证：$B = \{x \in \mathbb{F} \mid x^2 < (3, 0)\}$ 在 $\mathbb{F}$ 中没有上确界和下确界。