

# 数学分析 (1): 第 7 次习题课

刘思齐

1. 设函数  $f, g$  满足: i)  $f, g$  恒正; ii)  $f, -g$  是凸函数。求证:  $h = \frac{f^2}{g}$  也是凸函数。

2. 设  $f$  是闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 若对任意的  $x, y \in [a, b]$ , 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

求证:  $f$  是凸函数。

3. 设  $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} x_n$ 。

4. 求极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))}.$$

5. 求  $f(x) = 2 \arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶 Taylor 多项式。

6. 设  $\theta \in \mathbb{R}$  为一固定的常数,  $y(\varepsilon)$  满足:  $y(\varepsilon) - \varepsilon \sin(y(\varepsilon)) = \theta$ , 求  $\sin(y(\varepsilon))$  在  $\varepsilon = 0$  处的 5 阶 Taylor 多项式。