数学分析（1）：第 6 次习题课

刘思齐

1. i) 定义函数：
$$g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x>0.\end{cases}$$
则 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上任意阶导数都存在且连续。

   ii)（台阶函数）构造一个函数 $f(x)$，它在 $\mathbb{R}$ 上任意阶导数都存在且连续，且满足当 $x<0$ 时，$f(x)=0$；当 $0\le x\le 1$ 时，$0\le f(x)\le 1$；当 $x>1$ 时，$f(x)=1$。

   ii)（鼓包函数）构造一个函数 $f(x)$，它在 $\mathbb{R}$ 上任意阶导数都存在且连续，且满足当 $|x|\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$。

2. 设函数 $y=f(x)$ 满足如下方程：
$$y^3-x^3+x\,y+y-2=0,$$
求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$、$f'''(0)$。（Newton 算过的例子）

3. 求证：
$$\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}.$$
（上式左边叫做 $f(x)$ 的 Schwarz 导数。）

4. 设 $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ 满足当 $|x|\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$，求证：当 $|x|\le 1$ 时，$|f'(x)|\le 4$。（若将 $f(x)$ 换成 n 次多项式，则 4 可换成 n^2。）

5. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 上二阶可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，满足：
$$f''(\xi)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}.$$
（注意：f' 未必连续，所以不能用 Lagrange 中值定理。）

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且存在 $c>0$ 使 $|f'(x)|\le c\,f(x)$ 对任意的 $x\in[0,+\infty)$ 成立，求证：$f(x)=0$。