# 数学分析（1）：第 5 次习题课

刘思齐

1. 设 $C(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续函数的全体，求证：$|C(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$。

2. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足：

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   若 $f(x)$ 在某一 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处不连续，则 $f$ 在任意区间 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 上无界。

3. 构造一个 $\mathbb{R}$ 上的严格单调函数，使得它在所有有理点上不连续。

4. 对于 $\mathbb{R}$ 的任一子集 $E$，定义函数 $\rho_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\rho_E(x) = \inf_{y \in E}\{|x - y|\},$$

   求证：$\rho_E$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

5. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界集，如果 $E$ 上的任意连续函数都能达到最小值，求证：$E$ 的任意开覆盖存在一个勒贝格数。

6. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个有界集，$f$ 是 $E$ 上的连续函数。若 $E$ 可写为两个非空子集的并 $E = E_1 \cup E_2$，且满足：

   i) 若 $x_0$ 既是 $E_1$ 的极限点又是 $E_2$ 的极限点，则 $x_0 \in E$；

   ii) $f$ 在 $E_1$ 和 $E_2$ 上都一致连续。

   求证：$f$ 在 $E$ 上一致连续。