数学分析（1）：第 3 次习题课

刘思齐

1. 设函数 $G:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足如下递推关系：

$$G(0)=0,\quad G(n)=n-G(G(n-1)).$$

   这个数列称为 Hofstadter G-序列。求证：

   i) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$0\le G(n)\le n$，因此 G 由上述递推关系唯一确定。

   ii) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$G(n-1)\le G(n)\le G(n-1)+1$。

   iii) 数列 $x_n=G(n)/n$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

2. i) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，求证：

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

   ii) 设

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n),$$

   求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。这个极限称为 Euler 常数，一般记为 γ。

   iii) 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，记

$$\liminf_{n\to\infty}x_n=\alpha,\quad \limsup_{n\to\infty}x_n=\beta,$$

   求证：闭区间 $[\alpha,\beta]$ 中的每一点都是 $\{x_n\}$ 的极限点。你能构造一个满足这样的条件的 $\{x_n\}$ 吗？

4. 设 $a_n>0$，求证：

$$\limsup_{n\to\infty}n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\ge 1.$$

   你能构造一个数列 $\{a_n\}$ 使得上述不等式的等号成立吗？

5. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数，求证：总存在一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

所以，不存在收敛得最慢的级数，于是各种基于比较的判敛法都不是万能的。

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数，记

$$A_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

你能构造一个数列 $\{a_n\}$ 使得上述不等式的等号成立吗？