数学分析（1）：第 7 次习题课

刘思齐

1. 设函数 f、g 满足：i) f、g 恒正；ii) f、$-g$ 是凸函数。求证：$h=\frac{f^2}{g}$ 也是凸函数。

解答： 由题目条件和凸性定义，对任意的 $\lambda\in(0,1)$ 我们有：

$$\begin{aligned}0<f((1-\lambda)\,x+\lambda\,y)\le(1-\lambda)\,f(x)+\lambda\,f(y),\\ g((1-\lambda)\,x+\lambda\,y)\ge(1-\lambda)\,g(x)+\lambda\,g(y)>0,\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{f^2((1-\lambda)\,x+\lambda\,y)}{g((1-\lambda)\,x+\lambda\,y)}\le\frac{((1-\lambda)\,f(x)+\lambda\,f(y))^2}{(1-\lambda)\,g(x)+\lambda\,g(y)}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\,\frac{f^2(x)}{g(x)}+\lambda\,\frac{f^2(y)}{g(y)}-\frac{((1-\lambda)\,f(x)+\lambda\,f(y))^2}{(1-\lambda)\,g(x)+\lambda\,g(y)}\\=&\frac{\lambda\,(1-\lambda)(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2}{g(x)g(y)((1-\lambda)\,g(x)+\lambda\,g(y))}\ge0,\end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 凸。 □

2. 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，若对任意的 $x,y\in[a,b]$，有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

求证：f 是凸函数。

解答： 我们的目标是证明对任意的 $\lambda\in(0,1)$，有凸性条件

$$f((1-\lambda)\,x+\lambda\,y)\le(1-\lambda)\,f(x)+\lambda\,f(y)$$

成立。

首先证明，对任意的 $n\in\mathbb{N}$，以及 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $1\le k\le 2^n-1$，凸性条件对 $\lambda=\frac{k}{2^n}$ 成立。当 $n=1$ 时这就是题目的条件。假设当 n 时已经成立，考虑 $n+1$ 的情形。若 k 是偶数，那么可归结为 n 的情形，所以可设 $k=2l-1$，于是

$$\lambda=\frac{k}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2^n}+\frac{l-1}{2^n}\right).$$

设 $\lambda_1 = \frac{l}{2^n}$，$\lambda_2 = \frac{l-1}{2^n}$，由归纳假设，有

$$f((1-\lambda_1)\,x+\lambda_1\,y) \le (1-\lambda_1)\,f(x)+\lambda_1\,f(y),$$
$$f((1-\lambda_2)\,x+\lambda_2\,y) \le (1-\lambda_2)\,f(x)+\lambda_2\,f(y),$$

于是有

$$\begin{aligned}
&f((1-\lambda)\,x+\lambda\,y)\\
=&f\left(\frac{(1-\lambda_1)\,x+\lambda_1\,y+(1-\lambda_2)\,x+\lambda_2\,y}{2}\right)\\
\le&\frac{1}{2}\left(f((1-\lambda_1)\,x+\lambda_1\,y)+f((1-\lambda_2)\,x+\lambda_2\,y)\right)\\
\le&\frac{1}{2}\left((1-\lambda_1)\,f(x)+\lambda_1\,f(y)+(1-\lambda_2)\,f(x)+\lambda_2\,f(y)\right)\\
=&(1-\lambda)\,f(x)+\lambda\,f(y).
\end{aligned}$$

所以结论对 $n+1$ 也成立。

接下来，对任意的 $\lambda\in(0,1)$，定义数列 $\lambda_n = \frac{1}{2^n}[2^n\lambda]$，由第一步可知

$$f((1-\lambda_n)\,x+\lambda_n\,y) \le (1-\lambda_n)\,f(x)+\lambda_n\,f(y),$$

令 $n\to\infty$，则有 $\lambda_n\to\lambda$，再由 f 的连续性可知结论成立。

注：若将连续性替换为在某一开子区间内连续、有界、单调等条件，结论仍成立。若不加这类条件，则结论不成立，例如，$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的不连续解就是反例。 □

3. 设 $0<x_0<\frac{\pi}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,x_n$。

解答： 问题等价于求极限 $\lim_{n\to\infty} n\,x_n^2$：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\,x_n^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\,x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4+o(x_n^4)}{x_n^2-\left(x_n-\frac{x_n^3}{6}\right)^2+o(x_n^4)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4+o(x_n^4)}{\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^4)}=3,
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,x_n=\sqrt{3}$。 □

4. 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\tan(x))-\tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x))-\arctan(\arcsin(x))}.$$

解答： 设 $f(x)=\sin(\tan(x))$，$g(x)=\tan(\sin(x))$，所求极限即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}.$$

设 f 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 展开为

$$f(x)=a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots+a_n\,x^n+o(x^n),\quad a_1=1,$$

则 $f^{-1}(x)$ 的 Taylor 展开可写作

$$f^{-1}(x)=b_1\,x+b_2\,x^2+\cdots+b_n\,x^n+o(x^n),\quad b_1=a_1^{-1},$$

其中 b_i 是 $a_1,\ldots,a_i$ 的有理函数，并且具有以下形式：

$$b_i=-\frac{a_i}{a_1^{i+1}}+c_i(a_1,\ldots,a_{i-1}),\quad i=2,\ldots,n.$$

设 g 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 展开为

$$g(x)=a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots+a_{n-1}\,x^{n-1}+\tilde{a}_n\,x^n+o(x^n),$$

即前 $n-1$ 项与 f 相同，第 n 项不同。于是 $g^{-1}(x)$ 的 Taylor 展开的前 $n-1$ 项也与 $f^{-1}(x)$ 相同，第 n 项则为

$$\tilde{b}_n=-\frac{\tilde{a}_n}{a_1^{n+1}}+c_n(a_1,\ldots,a_{n-1}).$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(a_n-\tilde{a}_n)x^n+o(x^n)}{\frac{a_n-\tilde{a}_n}{a_1^{n+1}}x^n+o(x^n)}=a_1^{n+1}=1.$$

□

5. 求 $f(x)=2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式。

解答： 我们将证明

$$2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{k^2\binom{2k}{k}}+o(x^{2n+2}),$$

或者等价地

$$\arcsin^2(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k-1}\,x^{2k}}{k^2\binom{2k}{k}}+o(x^{2n+2}),$$

首先，$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，而

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}+o(x^{2n+2}),$$

所以

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+3}),$$

接下来只需考虑上述幂级数的 Cauchy 乘积。经过一定的计算，问题可归结为如下恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}\right)\left(\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!(2n-2k+1)}\right) = \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^2\binom{2n+2}{n+1}}.$$

注意，

$$\frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2n-2k+1}\right),$$

上述恒等式又可归结为

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} \frac{1}{(2k+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{1}$$

考虑如下有理函数：

$$R(x) = \frac{1}{x+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{x+2k}{x+2k+1},$$

恒等式 (1) 的右边即 $R(0)$。另一方面，$R(x)$ 可写为：

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x+2k+1}$$

（参见不定积分一章中有理函数的积分一节中的有关定理），其中

$$A_k = \lim_{x \to -(2k+1)} (x+2k+1)R(x) = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!},$$

所以 $R(0)$ 也等于 (1) 的右边。 □

6. 设 $\theta \in \mathbb{R}$ 为一固定的常数，$y(\varepsilon)$ 满足：$y(\varepsilon) - \varepsilon \sin(y(\varepsilon)) = \theta$，求 $\sin(y(\varepsilon))$ 在 $\varepsilon = 0$ 处的 5 阶 Taylor 多项式。

解答： 利用上次计算 Newton 算过的例子的那种技巧可以求得：

$$y(0) = \theta, \quad y'(0) = \sin(\theta), \quad y''(0) = \sin(2\theta),$$

更一般地则有

$$y^{(n)}(0) = (\sin^n(\theta))^{(n-1)}.$$

再注意到 $\sin(y(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon}(y(e) - \theta)$，于是不难写出答案。

注：这个方程叫做 Kepler 方程，是 Kepler 推导天体运动时用到的一个方程。上述解法由 Lagrange 给出，Lagrange 还给出用 $\sin(n\theta)$ 的级数表示的解。后来 Bessel 用更简单的方法给出了同样的解，并将级数的展开系数解释为 Bessel 函数。我们将在 Fourier 级数一章重温这个例子。 □