数学分析（1）：第 6 次习题课

刘思齐

1.

i) 定义函数：

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x>0.\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上任意阶导数都存在且连续。

ii)（台阶函数）构造一个函数 $f(x)$，它在 $\mathbb{R}$ 上任意阶导数都存在且连续，且满足当 $x<0$ 时，$f(x)=0$；当 $0\le x\le 1$ 时，$0\le f(x)\le 1$；当 $x>1$ 时，$f(x)=1$。

ii)（鼓包函数）构造一个函数 $f(x)$，它在 $\mathbb{R}$ 上任意阶导数都存在且连续，且满足当 $|x|\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$。

解答： i) 只要证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^n}=0$ 即可，而这等价于 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^n}{e^y}=0$。

ii) 取 $f(x)=\frac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}$ 即可。

iii) 取 $f(x)=f_2(1+x)f_2(1-x)$ 即可，其中 $f_2(x)$ 是上一步的 $f(x)$。 □

2. 设函数 $y=f(x)$ 满足如下方程：

$$y^3-x^3+x\,y+y-2=0,$$

求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$、$f'''(0)$。（Newton 算过的例子）

解答： 直接取 $x=0$，可解得 $f(0)=1$。对 x 求导可得：

$$(1+x+3y^2)y'=3x^2-y,$$

取 $x=0$，并取 $y=1$，得 $f'(0)=-\frac{1}{4}$。对 x 求二阶导可得：

$$(1+x+3y^2)y''=6x-2y'-6y(y')^2,$$

取 $x=0$、$y=1$、$y'=-\frac{1}{4}$，可得 $f''(0)=\frac{1}{32}$。三阶导数同理可得，结果是 $f'''(0)=\frac{393}{256}$。 □

3. 求证：

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2=0\quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}.$$

（上式左边叫做 $f(x)$ 的 Schwarz 导数。）

解答： 充分性“$\Leftarrow$”直接计算即可，此处略。下证必要性“$\Rightarrow$”。设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)$ 满足

$$\frac{g''(x)}{g(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)^2=0,$$

设 $g(x)=1/h(x)^2$，则上式等价于 $h''(x)=0$。根据 Lagrange 中值定理的推论，$h'(x)=c_1$，于是 $(h(x)-c_1\,x)'=0$，所以 $h(x)=c_1\,x+c_2$，因此 $f'(x)=g(x)=\frac{1}{(c_1\,x+c_2)^2}$。所以 $\left(f(x)+\frac{1}{c_1(c_1\,x+c_2)}\right)'=0$，于是 $f(x)=-\frac{1}{c_1(c_1\,x+c_2)}+c_3$。 □

4. 设 $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ 满足当 $|x|\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$，求证：当 $|x|\le 1$ 时，$|f'(x)|\le 4$。（若将 $f(x)$ 换成 n 次多项式，则 4 可换成 n^2。）

解答： 因为 $f'(x)=2\,a\,x+b$，它的最大值最小值只能在 $x=\pm 1$ 处取到，所以这其实是一个中学题目。不妨设 $a>0$，设 $x_0=-\frac{b}{2a}$，然后按 $x_0<-1$、$-1\le x_0\le 1$、$x_0>1$ 三种情况分别讨论即可。最复杂的情况出现在 $|x_0|\le 1$，此时，先由 $|f(-1)|\le 1$、$|f(1)|\le 1$、$|f(0)|\le 1$ 可知：

$$|a+b+c|\le 1,\quad |a-b+c|\le 1,\quad |c|\le 1,$$

由此可得 $|a|\le 2$，接下来由真正的极值 $\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|\le 1$ 以及上述条件可得 $(2a\pm b)^2\le 8a\le 16$。

一般 n 次多项式的情形可参见 Borwein 和 Erdélyi 的《Polynomials and Polynomial Inequalities》（GTM 161）的 Theorem 5.1.8。 □

5. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 上二阶可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，满足：

$$f''(\xi)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}.$$

（注意：f' 未必连续，所以不能用 Lagrange 中值定理。）

解答： 设 $k=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$，构造函数：

$$g(x)=f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)+k\frac{(x-a)^2}{2}\right),$$

则 $g'(x)=f'(x)-f'(a)-k(x-a)$，且满足 $g'(a)=g'(b)=0$。注意 $g''(x)=f''(x)-k$，若不存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $g''(\xi)=0$，根据 Darboux 定理，$g''(x)$ 在 (a,b) 上一定恒正或者恒负。不妨设对于任意的 $\xi\in(a,b)$，$g''(\xi)>0$。任取 $c,d\in(a,b)$，且满足 $c<d$，根据闭区间 $[c,d]$ 上的 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in[c,d]$ 满足

$$\frac{g'(d)-g'(c)}{d-c}=g''(\xi)>0,$$

所以 $g'(d)>g'(c)$，于是在 (a,b) 上 $g'(x)$ 严格单调增。

现在考虑 $g'(a)$，取一个单调递减趋于 a 的数列 $\{x_n\}$，则有

$$g'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a},$$

根据闭区间 $[a, x_n]$ 上的 Lagrange 中值定理，存在另一个数列 $\{y_n\}$，满足 $a < y_n < x_n$，且 $\frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a} = g'(y_n)$，于是 $g'(a) = \lim\limits_{n\to\infty} g'(y_n)$。任取 $c, d \in (a, b)$，且满足 $c < d$，一定存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时 $x_n < c$，于是 $y_n < c$。根据 $g'(x)$ 在 (a, b) 上的单调性，应有 $g'(y_n) < g'(c)$，取极限得 $g'(a) \le g'(c)$。同理可以证明 $g'(d) \le g'(b)$，于是我们得到

$$0 = g'(a) \le g'(c) < g'(d) \le g'(b) = 0,$$

矛盾！ □

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导，$f(0) = 0$，且存在 $c > 0$ 使 $|f'(x)| \le c\, f(x)$ 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 成立，求证：$f(x) = 0$。

解答： 设 $x \in [0, \frac{1}{2c}]$，由闭区间 $[0, x]$ 上的 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_1 \in (0, x)$，使得

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = |f'(\xi_1)| \le cf(\xi_1).$$

于是 $|f(x)| \le c\, x\, f(\xi_1) \le \frac{1}{2} f(\xi_1)$。对 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{2c}]$ 做同样的讨论，可知存在 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$，使得 $|f(\xi_1)| \le \frac{1}{2} f(\xi_2)$，于是 $|f(x)| \le \frac{1}{4} f(\xi_2)$。如此继续下去，我们得到一个单调递减的数列 $\{\xi_n\}$，满足 $|f(x)| \le \frac{1}{2^n} f(\xi_n)$，设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2c}]$ 上的极大值为 M，则有 $|f(x)| \le \frac{M}{2^n}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 成立，所以 $f(x) = 0$。

接下来对闭区间 $[\frac{1}{2c}, \frac{2}{2c}]$ 做同样的讨论可知 $f(x)$ 在它上也恒为零。如此继续，则 $f(x)$ 在整个 $[0, +\infty)$ 上恒为零。 □