数学分析（1）：第 2 次习题课（附解答版）

刘思齐

1. 设 $I=[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间，S 是 I 的开覆盖。求证：

   i) 存在 $\delta>0$，使得对任意直径小于 δ 的 I 的非空子集 A，即

   $$A\subseteq I,\quad \sup_{x,y\in A}\{|x-y|\}<\delta,$$

   存在 $J\in S$ 使得 $A\subseteq J$。（这个 δ 叫覆盖 S 的一个勒贝格数。该结果称为勒贝格数引理。）

   ii) 利用勒贝格数引理证明有限覆盖定理。

解答： i) 我们给出两种证明。

（有限覆盖证明）对于任意的 $x\in I$，它必被某个 $J\in S$ 覆盖。因为 J 是开区间，所以存在 $r>0$，使得 $B_r(x)\subseteq J$。将 r 缩小一半，然后让 x 跑遍 I 中的点，我们得到 I 的另一个开覆盖：

$$\{B_{r/2}(x)\mid x\in I\},$$

由有限覆盖定理，存在 $x_1,\ldots,x_n$，以及相应的 $r_1,\ldots,r_n$ 使得

$$I\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_{r_i/2}(x_i).$$

我们取

$$\delta=\frac{1}{2}\min(r_1,\ldots,r_n).$$

现在考虑集合 A。设 $x\in A$，x 必在某个 $B_{r_i/2}(x_i)$ 中，所以

$$|x-x_i|<r_i/2.$$

对于另外一点 $y\in A$，注意 A 的直径小于 δ，所以有

$$|y-x|<\delta.$$

于是根据三角不等式，我们有

$$|y-x_i|\le|x-x_i|+|y-x|<r_i/2+\delta\le r_i,$$

所以集合 A 是 $B_{r_i}(x_i)$ 的子集，于是，根据 $B_{r_i}(x_i)$ 的取法，A 也是 S 中某开区间的子集。

（极限点证明）用反证法，假设这样的 δ 不存在，于是对任意的 $\delta>0$，存在一个直径小于 δ 的 I 的非空子集 A，使得它不能被 S 中的单个 J 盖住。我们依次取 $\delta=1/n$ $(n=1,2,3,\dots)$，设相应的非空集合 A 为 A_n $(n=1,2,3,\dots)$。因为 A_n 非空，所以可以在其中取一点 x_n，于是得到一个数列 $\{x_n\}$。根据极限点定理，这个数列存在一个极限点 $x\in I$。点 x 一定被 S 中的某个开区间 J 覆盖，于是可以找到 $\epsilon>0$ 使得 $B_\epsilon(x)\subseteq J$。由极限点的性质，存在无穷多个 x_{n_k} 在 $B_{\epsilon/2}(x)$ 中。所以一定有一个 $x_n\in B_{\epsilon/2}(x)$ 满足 $\frac{1}{n}<\frac{\epsilon}{2}$。

现在，对于任一 $y\in A_n$，有

$$|y-x|\le|y-x_n|+|x-x_n|<\frac{1}{n}+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon,$$

所以 $A_n\subseteq B_\epsilon(x)\subseteq J$，这与 A_n 的取法矛盾。

ii) 设 δ 是开覆盖 S 的勒贝格数。取 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $n\delta>b-a$，将 I 等分为 n 个小区间，于是每个小区间的直径为 $(b-a)/n<\delta$，因此，根据勒贝格数的定义，存在 S 中的单个开区间覆盖这个小区间。小区间有 n 个，于是至多取 S 中的 n 个开区间就能盖满整个 I。 $\square$

2. 设 $\mathbb{F}$ 是一个全序域，极限点定理在 $\mathbb{F}$ 上成立，求证：

i) $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质。

ii) 有限覆盖定理在 $\mathbb{F}$ 上成立。

解答： i) 用反证法。假设存在 $x\in\mathbb{F}$ 满足 $x>0$ 且对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有 $n<x$。于是 $[0,x]$ 构成一个闭区间，$\mathbb{N}$ 是它的无穷子集。根据极限点定理，存在 $N\in[0,x]$ 是 $\mathbb{N}$ 的上确界。根据上确界性质，对于 $\epsilon=1/2$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 满足

$$N-\epsilon<n\le N$$

再取 $\epsilon'=(N-n)/2$，则又有 $n'\in\mathbb{N}$ 满足

$$N-\epsilon'<n'\le N.$$

于是有

$$0<n'-n<\frac{1}{2},$$

这是不可能的。所以不存在这样的 $x\in\mathbb{F}$。

ii) 设 $I=[a,b]$ 是 $\mathbb{F}$ 中的闭区间，S 是它的一个开覆盖。因为 $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质，所以 $\mathbb{F}$ 也具有 Lindelöf 性质（证明方法和课上讲的一样）。所以我们可以假设 S 是可数的，即 $S=\{J_1,J_2,\dots\}$。

用反证法，假设 S 的任何有限子集都不能覆盖 I。设 $C_n = I-(J_1\cup\cdots\cup J_n)$，那么 C_n 全都非空，并且满足如下包含关系：

$$I = C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$$

我们在每个 C_n 中取一点 x_n，于是得到一个数列 $\{x_n\}$。根据极限点定理，这个数列有极限点 $x \in I$。如果 x 不属于某个 C_N，那么一定可以找到一个 $\epsilon > 0$，使得 $B_\epsilon(x)\cap C_N = \emptyset$ （因为 C_N 总是有限多个闭区间的并）。根据 C_n 之间的包含关系，对于任意的 $n > N$，$B_\epsilon(x)\cap C_n = \emptyset$，于是 $B_\epsilon(x)$ 只能包含有限多个 x_n，这与 x 是极限点矛盾。所以 x 一定属于所有的 C_n，于是 $\bigcap_{n=1}^\infty C_n$ 非空。但是另一方面，

$$\bigcap_{n=1}^\infty C_n = I - \bigcup_{n=1}^\infty J_n = \emptyset,$$

矛盾。 □

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

解答： 设 $y_n = x_{2n} - x_{2n-2}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，所以 $\{y_n\}$ 的前 n 项平均值也收敛到 0，即

$$0 = \lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}-x_0}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{n}.$$

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{2n-1}}{n} = 0$。于是，对于 $\forall\epsilon > 0$，存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}
\forall k > N_1 \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{x_{2k}}{2k}\right| < \frac{\epsilon}{2},\\
\forall k > N_2 \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{x_{2k-1}}{2k-1}\right| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

取 $N > 2\max(N_1, N_2)$，对任意的 $n > N$，

- 若 $n = 2k$，则 $k > N_1,\ k > N_2$，于是
$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| = \left|\frac{x_{2k}-x_{2k-1}}{2k}\right| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon;$$
- 若 $n = 2k-1$，则 $k > N_1+1,\ k > N_2+1$，于是
$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| = \left|\frac{x_{2k-1}-x_{2k-2}}{2k-1}\right| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

命题得证。 □

4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} = 0,$$

求证：$\{a_n\}$ 无界。

解答： 用反证法。假设 $a_n \le M$。根据极限定义，取 $0<\epsilon<\frac{1}{2}$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\epsilon.$$

于是，

$$\begin{aligned}
a_n &< \left(a_{n+1}+a_{n+2}\right)\epsilon. \\
&< \left(a_{n+2}+2a_{n+3}+a_{n+4}\right)\epsilon^2. \\
&< \left(a_{n+3}+3a_{n+4}+3a_{n+5}+a_{n+6}\right)\epsilon^3. \\
&< \cdots \\
&< \epsilon^p \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i} a_{n+i} < (2\,\epsilon)^p M.
\end{aligned}$$

上述不等式对任意的 $p\in\mathbb{N}$ 都成立。令 $p\to\infty$，则得到：

$$0<a_n\le \lim_{p\to\infty}(2\,\epsilon)^p M=0,$$

矛盾。 □

5. 设 $c\in\mathbb{R}$，定义数列 $\{a_n\}$，其中：

$$a_0=c,\quad a_{n+1}=a_n^2+c.$$

求证：

i) 当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$\{a_n\}$ 发散。

ii) 当 $-\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$ 时，$\{a_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

iii) 当 $-2\le c<-\frac{1}{4}$ 时，$\{a_n\}$ 有界。

iv) 当 $c<-2$ 时，$\{a_n\}$ 发散。

（在复动力系统理论中，使得上述 $\{a_n\}$ 有界的复数 $c\in\mathbb{C}$ 构成的集合即著名的 Mandelbrot 集。我们在这个练习里求出了这个分形集合和实轴的交。）

解答： i) 当 $c>0$ 时，

$$a_{n+1}=a_n^2+c\ge 2a_n\sqrt{c},$$

对 n 应用数学归纳法得：

$$a_n\ge(4c)^{\frac{n}{2}}a_0,$$

因此当 $c>1/4$ 时，$\{a_n\}$ 无界，所以发散。

ii) 首先，用数学归纳法和简单的三角不等式放缩不难证明当 $|c| \leq 1/4$ 时，总有 $|a_n| < 1/2$。所以只要能够证明 $\{a_n\}$ 单调即可证明极限存在。这在 $0 < c < 1/4$ 时的确是对的，因为此时 $0 < a_n < 1/2$，而

$$a_{n+1} - a_n = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}),$$

注意 $a_1 - a_0 = c^2 > 0$，所以对一切 $n \in \mathbb{N}$，有 $a_{n+1} > a_n$。所以，根据单调有界收敛定理，极限 $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。对 $\{a_n\}$ 的递推关系两边取极限得

$$x = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}.$$

另一个根被舍掉了，因为它大于 $1/2$，所以不可能是 $\{a_n\}$ 的极限。

当 $-1/4 \leq c \leq 0$ 时，$\{a_n\}$ 不再单调，我们需要其它的办法。不难想象，此时的极限应该还是上述 x，所以我们不妨考虑 $\{a_n\}$ 和 x 的差：

$$a_{n+1} - x = (a_n + x)(a_n - x).$$

利用中学知识不难证明，当 $-1/4 \leq c \leq 0$ 时，$|x| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$，于是

$$|a_n + x| \leq |a_n| + |x| < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以

$$|a_n - x| < 2^{-n/2}|a_0 - x|,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - x| = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$。

iii) 我们将证明 $|a_n| \leq |c|$。首先当 $n = 0$ 时，$a_0 = c$，这是对的。假设当 n 时正确，考虑 $n+1$ 的情形：

$$|a_{n+1}| = |a_n^2 + c| < |c|?$$

注意 $c < 0$，为方便起见，我们记 $\bar{c} = -c > 0$，于是只要证明：

$$-\bar{c} \leq a_n^2 - \bar{c} \leq \bar{c},$$

而这是显然的，因为 $0 \leq a_n^2 \leq c^2 = \bar{c}\,\bar{c} \leq 2\bar{c}$。

iv) 设 $c = -2 - x$，则 $a_0 = c = -2 - x$，

$$a_1 = a_0^2 + c = (2+x)^2 - 2 - x = 2 + 3x + x^2 > 2 + 3x.$$

假设已知 $a_n > 2 + 3^n x$ $(n \geq 1)$，则

$$a_{n+1} > (2 + 3^n x)^2 - 2 - x = 2 + (4 \cdot 3^n - 1)x + 3^{2n}x^2 > 2 + 3^{n+1}x.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 无界。 $\square$