数学分析（1）：第 12 次习题课

刘思齐

1. 设 $a > b > 0$，定义 $a_0 = a$、$b_0 = b$，以及

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}.$$

再定义

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}},$$

求证：

i) 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，$I(a,b) = I(a_n, b_n)$。

ii) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$，则 $I(a,b) = \frac{\pi}{2A}$。

（注：因为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 收敛非常快，所以过去的人们用这种方法计算椭圆积分。对于第二类、第三类椭圆积分也有类似的方法。极限 A 叫做正数 a、b 的算术—几何平均，本身也是个有趣的数学对象。）

解答： i) 只需证 $I(a,b) = I(a_1, b_1)$。设 $x = b\tan\theta$，则有

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}},$$

再设 $x = t + \sqrt{t^2 + b_1^2}$，于是 $t = \frac{x^2 - b_1^2}{2\,x}$，$\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{t^2+b_1^2}}\mathrm{d}t$，且

$$(x^2+a^2)(x^2+b^2) = 4\,x^2\,(t^2 + a_1^2),$$

由此不难得到

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,x\sqrt{t^2+a_1^2}} \frac{x}{\sqrt{t^2+b_1^2}}\mathrm{d}t = I(a_1, b_1).$$

ii) 因为 $I(a,b) = I(b,a)$，所以只需证 $I(a,b)$ 关于 a 连续。设 $a_1 > b$，$a_2 > b$，则有

$$\begin{aligned}
&|I(a_1,b) - I(a_2,b)| \\
\le& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\sqrt{a_1^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} - \sqrt{a_2^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\right|}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\sqrt{a_2^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta \\
\le& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|a_1 - a_2|\cos\theta}{b^2}\mathrm{d}\theta = \frac{|a_1 - a_2|}{b^2},
\end{aligned}$$

所以 $I(a,b)$ 关于 a 连续。 $\square$

2. 计算广义积分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

（提示：利用 $1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$ $(0<x<1)$ 和 Wallis 公式。）

解答： 由广义积分定义及换元法可得：

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 e^{-n^2x^2}\mathrm{d}x$$

由 $e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$ 得：

$$\int_0^1 e^{-n^2x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n^2}},$$

设 $x=\tan\theta$，则有

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n^2-2}\theta\mathrm{d}\theta<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n^2-2}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n^2-3)!!}{(2n^2-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

由 $e^{-x^2}>1-x^2$ 得：

$$\int_0^1 e^{-n^2x^2}\mathrm{d}x>\int_0^1(1-x^2)^{n^2}\mathrm{d}x,$$

设 $x=\sin\theta$，则有：

$$\int_0^1(1-x^2)^{n^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\cos^{2n^2+1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n^2)!!}{(2n^2+1)!!}.$$

由 Wallis 公式可得

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{(2n^2-3)!!}{(2n^2-2)!!}\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty} n\frac{(2n^2)!!}{(2n^2+1)!!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以原积分的值就是 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。 $\square$

3. 计算广义积分

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

（提示：考虑 $\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{1}{2})x}\mathrm{d}x$。）

解答： 利用三角恒等式不难证明：

$$\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{1}{2})x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{1}{2})x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

另一方面，设
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin(\frac{1}{2})x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，所以由 Riemann 引理，
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x=0,$$
与前一极限相加得：
$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$
□

4. 计算无穷级数
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$
（提示：考虑 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t\mathrm{d}t$。）

解答： 从 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} t\mathrm{d}t$ 出发分部积分两次不难得出如下递推关系：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} t\mathrm{d}t=-2\,n^2 I_n+(2\,n^2-n)I_{n-1},$$
该式又可写为：
$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_n-\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}I_{n-1}=-\frac{\pi}{4}\frac{1}{n^2}.$$
累加得：
$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_n=I_0-\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right).$$
利用不等式 $t<\frac{\pi}{2}\sin t$ 不难证明
$$0<\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_n<\frac{\pi^3}{8}\frac{1}{2n+2},$$
最后，求 $n\to\infty$ 的极限即可。 □

5. 设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\gamma(t)=(x(t),y(t))$ 是一条连续可导的简单闭曲线。我们课上已经证明，它所围区域的面积 A 和它的长度 L 可按如下公式计算：
$$A=\frac{1}{2}\int_a^b(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\mathrm{d}t,\quad L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$
求证：

i) 面积还可通过如下公式计算：
$$A=\int_a^b x(t)y'(t)\mathrm{d}t,\quad \text{或 } A=-\int_a^b x'(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

ii) 若 $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导，严格单调增，且 $\phi(\alpha)=a$、$\phi(\beta)=b$，记 $\tilde{x}(s)=x(\phi(s))$、$\tilde{y}(s)=y(\phi(s))$，则有

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\tilde{x}(s)\tilde{y}'(s)-\tilde{x}'(s)\tilde{y}(s))\mathrm{d}s,\quad L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\tilde{x}'(s)^2+\tilde{y}'(s)^2}\mathrm{d}s.$$

即面积和长度与参数化的选取无关。

iii) 若 $x'(t)^2+y'(t)^2>0$，则称 γ 是正则的。对于正则曲线 γ，定义

$$s(t)=\frac{2\pi}{L}\int_a^t\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t,$$

则 $s(t)$ 连续可导且严格单调，它的逆给出一个满足 ii) 中条件的映射 $\phi:[0,2\pi]\to[a,b]$，于是我们可定义曲线 γ 的一个新参数化 $s\mapsto(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s))$。在此参数化下，我们有 $\sqrt{\tilde{x}'(s)^2+\tilde{y}'(s)^2}=\frac{L}{2\pi}$。

参数 s（或它的正实数倍）叫弧长参数，我们以下假设最初的参数 t 就是弧长参数，且满足 $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\frac{L}{2\pi}$。

iv)（Wirtinger 不等式）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的连续可导函数，且满足 $\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=0$，则

$$\int_0^{2\pi}f'(t)^2\mathrm{d}t\geq\int_0^{2\pi}f(t)^2\mathrm{d}t,$$

等号成立当且仅当 $f(t)=a\,\cos t+b\,\sin t$。

v) 等周不等式成立：$4\,\pi\,A\leq L^2$，等号成立当且仅当 γ 是一个圆。

解答： i)、ii)、iii) 都显然，我们下面只证 iv) 和 v)。

iv) 首先说明，存在一个 $t_0\in[0,\pi)$ 满足 $f(t_0)=f(t_0+\pi)$。若 $f(0)=f(\pi)$，则取 $t_0=0$ 即可。若 $f(0)\neq f(\pi)$，设 $g(t)=f(t)-f(t+\pi)$，则有 $g(0)g(\pi)<0$，由连续函数的介值性质，存在一个 $t_0\in(0,\pi)$，使得 $g(t_0)=0$。

接下来，设 $c=f(t_0)=f(t_0+\pi)$，不难证明如下恒等式：

$$f'^2-(f-c)^2-\left(f'-(f-c)\cot(t-t_0)\right)^2=\left((f-c)^2\cot(t-t_0)\right)'.$$

由 f 的可导性及 L'Hôpital 法则易知 $(f-c)^2\cot(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 和 $t=t_0+\pi$ 处都是连续的，因此有

$$\int_0^{2\pi}f'(t)^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}(f(t)-c)^2\mathrm{d}t\geq\left((f-c)^2\cot(t-t_0)\right)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

所以

$$\int_0^{2\pi}f'(t)^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}f(t)^2\mathrm{d}t\geq 2\,\pi\,c^2\geq 0.$$

等号成立当且仅当 $c=0$，且 $f'(t)=f(t)\cot(t-t_0)$，于是有 $f(t)=A\sin(t-t_0)$。

v) 首先，通过平移坐标原点可使得 $\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t = 0$。接下来

$$
\begin{aligned}
& L^2 - 4\,\pi\,A \\
=& 2\pi \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t - 4\pi \int_0^{2\pi} xy'\mathrm{d}t \\
=& 2\pi \int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2 + (y' - x)^2)\mathrm{d}t \\
\geq& 2\pi \int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2)\mathrm{d}t \geq 0.
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $x(t) = a\,\cos t + b\,\sin t$, $y'(t) = x(t)$，所以是一个圆。 □